الدكتور خالد رشدي بركات
كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية
في جامعة دمشق

مسائل في الهندسة الوصفية

الطبعة السادسة



منشورات جامعة دمشق

١٤١٨ – ١٤١٩ هـ
١٩٩٧ – ١٩٩٨ م

الدكتور
خالد رشدي بركات
كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية
جامعة دمشق

مسائل
في
الهندسة الوصفية



مقدمـــة

إن هذا الكتاب معد لطلبة المعاهد والكليات الهندسية على مختلف تخصصاتهم الذين يقومون بدراسة مادة الهندسة الوصفية .

في بداية كل بحث من هذا الكتاب أوردنا شرحاً نظرياً مقتضباً أتبعنـاه بحل أمثلة نموذجية تُعرّف الطالب على طريقة حل المسائل ورسم مخططاتها يليها مجموعة كافية من المسائل غير المحلولة . كما أنه في بعض الأبحاث أضفنا إلى هذا كله أسئلة يجيب عليها الطالب ليتأكد من استيعابه للموضوع .

ننصح الطلبة المبتدئين بدراسة مادة الهندسة الوصفية باتباع الطريقة التالية :

١ ـ دراسة القسم النظري من البحث في الكتب النظرية .

٢ ـ قراءة الشرح النظري المقتضب الذي أوردناه في بداية كل بحث والإجابة على الأسئلة المتعلقة به .

٣ ـ القيام بجميع الإنشاءات المتعلقة بالأمثلة المحلولة حسب الشرح .

٤ ـ حل المسائل غير المحلولة حسب توجيهات المدرس .

يحتوي هذا الكتاب على ما ينوف عن ألف مسألة محلولة وغير محلولة وإن احتواءه على هذا العدد الضخم من المسائل ليُسهّل على المدرس اختيار المسائل اللازمة للتمارين والوظائف البيتية والمذاكرات والإمتحانات مما يجعله ضرورياً لا غنى عنه ليس للطلبة فحسب بل ولمدرسي المادة .

الفصل الاول

البحث الأول

المفاهيم الرئيسية للاسقاط القائم

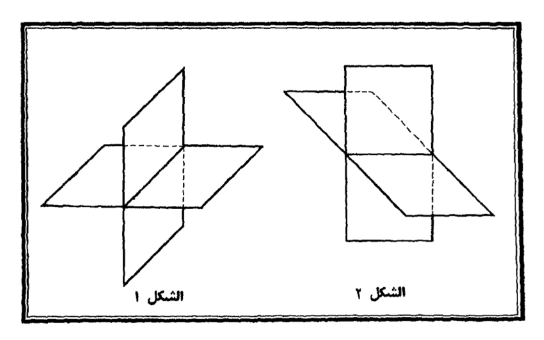
اسئلة للاختبار الشخصي

ارسم مستويين معتبرين في الإسقاط القائم كمستويي إسقاط ، دوّن عليها التسميات والرموز والحقول والزوايا (الشكل ١ ، ٢) . ثم أجب على الأسئلة التالية :

١ ـ ما هو خط الأرض ؟

٢ ـ أي حقول مستويات الإسقاط تحدد الزوايا الفراغية : الأولى ، الثانية ، الثالثة ، الرابعة ؟

٣ ـ ماذا يستخدم كحدود بين الزوايا الفراغية المذكورة : الأولى والثانية ، الثالثة والرابعة ، الأولى والرابعة ، الثانية والثالثة ؟



٤ – عدد الزوايا الفراغية الكائنة فوق مستوي الإسقاط الأفقي ، تحت مستوي الإسقاط الأفقي ، أمام مستوي الإسقاط الشاقولي ، خلف مستوي الإسقاط الشاقولي ؟

٥ – ماهي وضعية نقطة كائنة في الربع الأول ، الثاني ، الثالث ، الرابع بالنسبة لمستويات الإسقاط ؟

٦ – أين تقع نقطة موجودة بين الربع الأول والرابع ، وبين الثاني والثالث ، وبين الأول والثاني وبين الثالث والرابع ؟

٧ – أين تقع نقطة موجودة على حدود جميع الأرباع الأربعة ؟

٨ – ماذا ندعو بالإسقاط القائم لنقطة فراغية على مستوي ما ؟

٩ – ماذا ندعو بالمسقط الأفقي لنقطة ، المسقط الشاقولي لنقطة ؟

١٠ – في أي الحقول تقع مساقط نقطة ما كائنة في الربع الأول ، الثاني ، الثالث ، الرابع ؟

١١ – أين توجد مساقط نقطة واقعة في الحقل الأمامي لمستوي الإسقاط الأفقي ، في الحقل الخلفي لمستوي الإسقاط الأفقي ، في الحقل العلوي لمستوي الإسقاط الشاقولي ، في الحقل السفلي لمستوى الإسقاط الشاقولي ، على خط الأرض ؟

١٢ – ما هي ميزة جميع نقاط مستوي الإسقاط الأفقي ، مستوي الإسقاط الشاقولي ؟

١٣ – أين يمكن أن توجد نقطة إذا كان مسقطها الأفقي واقعاً في الحقل الأمامي لمستوي الإسقاط الأفقي ، في الحقل الخلفي لمستوي الإسقاط الأفقي ، وإذا كان مسقطها الشاقولي واقعاً في الحقل العلوي لمستوي الإسقاط الشاقولي ، في الحقل السفلي لمستوي الإسقاط الشاقولي ؟

١٤ – ما هو مخطط النقطة وكيف يمكن أن ننتقل من الصورة الفراغية إلى المخطط ؟

١٥ – أي حقول مستويات الإسقاط ستقع بعد إنطباقها فوق خط الأرض ، تحت خط الأرض ؟

١٦ – أين توجد نقطة إذا كان مسقطها الأفقي على المخطط واقعاً فوق خط الأرض ، تحت خط الأرض ،أو إذا كان مسقطها الشاقولي واقعاً فوق خط الأرض ، تحت خط الأرض ؟

البحث الثاني

النقطة

نرمز لنقاط الفراغ بأحرف لاتينية كبيرة ....A , B , C , D , E , F

نرمز لمساقط هذه النقاط بأحرف صغيرة ...a ، b ، c ، d ، e ، f

تزود رموز المساقط الشاقولية تمييزاً عن رموز المساقط الأفقية بالاشارة « ′ » (فتحة) . مثال : المسقط الأفقي لنقطة A يرمز له بالحرف a ، وأما المسقط الشاقولي فيرمز له بالحرف a′ .

إن كلا مسقطي النقطـــة الواحدة « الأفقي والشاقولي » يقعان على عمود واحد على خط الأرض .

في الفراغ	على المخطط
١ – النقطة في الربع الأول	المسقط الأفقي للنقطة يقع تحت خط الأرض المسقط الشاقولي للنقطة يقع فوق خط الأرض
٢ – النقطة في الربع الثاني	المسقطان « الأفقي والشاقولي » يقعان فوق خط الأرض .

٣ ـ النقطة في الربع الثالث — المسقط الأفقي للنقطة يقع فوق خط الأرض
المسقط الشاقولي للنقطة يقع تحت خط الأرض .

٤ ـ النقطة في الربع الرابع — المسقطان « الأفقي والشاقولي » يقعان تحت
خط الأرض .

إن أي نقطة من مستوي الإسقاط الأفقي لها مسقط شاقولي يقع على خط الأرض وإن أي نقطة من مستوي الإسقاط الشاقولي لها مسقط أفقي يقع على خط الأرض. إذا انطبق مسقطا نقطة على خط الأرض فالنقطة ستكون على خط الأرض .

البعد y ـ من المسقط الأفقي للنقطة حتى خط الأرض ـ يساوي إلى بعد النقطة نفسها عن مستوي الإسقاط الشاقولي .

البعد z ـ من المسقط الشاقولي للنقطة حتى خط الأرض ـ يساوي إلى بعد النقطة نفسها عن مستوي الإسقاط الأفقي .

الإحداثيـة z موجبة لجميع النقاط الواقعة فوق مستوي الإسقاط الأفقي وسالبة لجميع النقاط الواقعة تحت مستوي الإسقاط الأفقي .

الاحداثيـة y موجبة لجميع النقاط الواقعة أمام مستوي الإسقاط الشاقولي وسالبة لجميع النقاط الواقعة خلف مستوي الإسقاط الشاقولي .

اسئلة للاختبار الشخصي

أعط أجوبة تامة على الأسئلة التالية :

١ ـ كيف نرمز لنقاط الفراغ ؟

٢ ـ كيف نرمز لمساقط نقطة فراغية وكيف نميز بين هذه المساقط ؟

٣ ـ كيف تقع على المخطط مساقط النقطة الواحدة الفراغية بالنسبة لخط الأرض ؟

٤ ـ هل للمخطط معنى عندما تكون الأعمدة النازلة من مساقط نقطة على خط الأرض غير منطبقة على بعضها ؟

٥ ـ ماذا نفهم من العبارة : (معطاة نقطة فراغية) ؟

٦ ـ أين تقع على المخطط مساقط نقطة ما موجودة في الربع الأول ، الثاني ، الثالث ، الرابع ؟

٧ ـ أي النقاط في الفراغ يحتمل فيها إنطباق مسقطها الأفقي والشاقولي على خط الأرض ؟

٨ ـ كيف تعيد وضعية نقطة فراغية حسب مساقطها ؟

٩ ـ أين تقع على المخطط مساقط نقطة موجودة في الحقل الأمامي لمستوي الإسقاط الأفقي ، في الحقل الخلفي لمستوي الإسقاط الأفقي ، في الحقل العلوي لمستوي الإسقاط الشاقولي ، في الحقل السفلي لمستوي الإسقاط الشاقولي ؟

١٠ ـ كيف نرمز لبعد نقطة في الفراغ عن مستوي الإسقاط الأفقي ، عن مستوي الإسقاط الشاقولي ؟

١١ ـ بماذا يقاس البعد على المخطط بين النقطة في الفراغ ومستوي الإسقاط الأفقي ، ومستوي الإسقاط الشاقولي ؟

١٢ ـ في أي الزوايا الفراغية تكون الإحداثية z للنقطة موجبة ، سالبة ؟

١٣ ـ في أي الزوايا الفراغية تكون الإحداثية y للنقطة موجبة ، سالبة ؟

١٤ ـ ما هي إشارات الإحداثيات z,y لنقطة تقع في الربع الأول ، الثاني ، الثالث ، الرابع ؟

١٥ ـ ما هي الإحداثية التي تعين على المخطط المسقط الأفقي للنقطة ، المسقط الشاقولي للنقطة ؟

١٦ ـ كيف نأخذ على المخطط قطعة تعين الإحداثية z إذا كانت موجبة ، سالبة ، وقطعة تعين الإحداثية y إذا كانت موجبة ، سالبة ؟

أمثلـــة

● **المثال ١ :** ارسم مخطط نقطة ما A موجودة في الربع الثاني وتبعد عن مستوي الإسقاط الأفقي بمقدار 32 mm وعن مستوي الإسقاط الشاقولي بمقدار 18 mm (الشكل ٣) .

الحل : نأخذ على خط الأرض نقطة ما a_x ثم نرسم منها عموداً على خط الأرض . المسقطان (a،a′) للنقطة المبحوث عنها A سوف يقعان على هذا العمود فوق خط الأرض ، فلكي نضمن الأبعاد المفروضة من النقطة وحتى مستويات الإسقاط يجب أن يكون البعد من المسقط الأفقي للنقطة حتى خط الأرض مساوياً 18 mm (البعد بين النقطة ومستوي الإسقاط الشاقولي) أما المسافة بين المسقط الشاقولي للنقطة وخط الأرض ـ 32 mm (البعد بين النقطة ومستوي الإسقاط الأفقي) . والآن يبقى أن نأخذ على العمود من الجهة العليا اعتباراً من a_x قطعة بطول 18 mm فنحصل بذلك على المسقط الأفقي (a) للنقطة ، وبعد ذلك نأخذ من الجهة العليا قطعة بطول 32 mm فنحصل على المسقط الشاقولي (a′) .

● **المثال ٢ :** أنشيء مخطط نقطة ما A(– 24 , – 13) (الشكل ٤) .

الحل : بما أن إحداثيات النقطة (a،a′) سالبة لذا فالنقطة موجودة خلف مستوي الإسقاط الشاقولي وتحت مستوي الإسقاط الأفقي أي في الربع الثالث .

لنأخذ نقطة ما a_x على خط الأرض ، ولنرسم منها عموداً على خط الأرض ، ثم نأخذ عليه من الجهة العليا قطعة $a_x a$ بطول 24 mm (y) ومن الجهة السفلى

$a_x a'$ بطول 13 mm (z) فمساقط النقطة الحاصلة توافق وضعية النقطة في الربع الثالث .

● **المثال ٣** : لدينا المسقط الأفقي (a) للنقطة A الموجودة في الربع الثالث . أنشيء مسقطها الشاقولي (a') وفقاً للشرط $z = y + 15$ mm (الشكل ٥) .

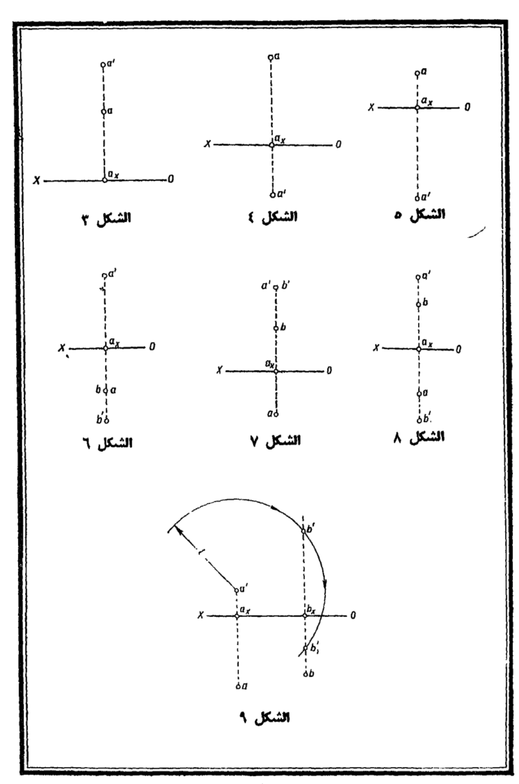
الحل : إن المسقط الشاقولي للنقطة المطلوبة يجب أن يقع تحت خط الأرض ، وعلى خط مستقيم مار من المسقط الأفقي المعطى للنقطة والعمود على خط الأرض . البعد من المسقط الأفقي للنقطة حتى خط الأرض يقاس بالبعد من النقطة A حتى مستوي الإسقاط الشاقولي (y) . بناء عليه للحصول على المسقط الشاقولي (a') للنقطة يكفي أن نمرر من المسقط الأفقي (a) عموداً على خط الأرض ونعين عليه اعتباراً من النقطة a_x ونحو الأسفل قطعة $a_x a'$ بطول $a_x a$ + 15 mm .

● **المثال ٤** : لدينا نقطة A (12 ,20) . ارسم مخطط النقطة B المناظرة للنقطة A بالنسبة لـ :مستوي الإسقاط الأفقي (الشكل ٦) ، مستوي الإسقاط الشاقولي (الشكل ٧) ، خط الأرض (الشكل ٨) .

الحل : النقطة (a،a') معطاة في الربع الأول .

١ ـ النقطة التي تناظرها بالنسبة لمستوي الإسقاط الأفقي موجودة في الربع الرابع أي B (12 و 20 -) ننشيء مخطط النقطة (a،a') ونعين على عمود عام ونحو الأسفل قطعة $a_x b$ بطول 12 mm (y) ، وقطعة $a_x b'$ بطول 20 mm (z) .

٢ ـ النقطة التي تناظرها بالنسبة لمستوي الإسقاط الشاقولي موجودة في الربع


a'
a
a_x
X
0
الشكل ٣
a
a_x
X
0
a'
الشكل ٤
a
a_x
X
0
a'
الشكل ٥
a'
a_x
X
0
b a
b'
الشكل ٦
a' b'
b
a_x
X
0
a
الشكل ٧
a'
b
a_x
X
0
a
b'
الشكل ٨
b'
a'
a_x
b_x
X
0
b'_1
b
a

الشكل ٩

الثاني أي : $B(-12, 20)$.ننشيء كالسابق مخطط النقطة (a, a') ونعين على عمود عام ونحو الأعلى قطعة $a_x b$ بطول $y = 12\ mm$ وقطعة $a_x b'$ بطول $z = 20\ mm$.

٣ — النقطة التي تناظرها بالنسبة لخط الأرض موجودة في الربع الثالث أي $B(-12, -20)$. ننشيء كالسابق مخطط النقطة (a, a') ونعين على عمود عام ونحو الأعلى قطعة $a_x b$ بطول $y = 12\ mm$ ونحو الأسفل قطعة $a_x b'$ بطول $z = 20\ mm$.

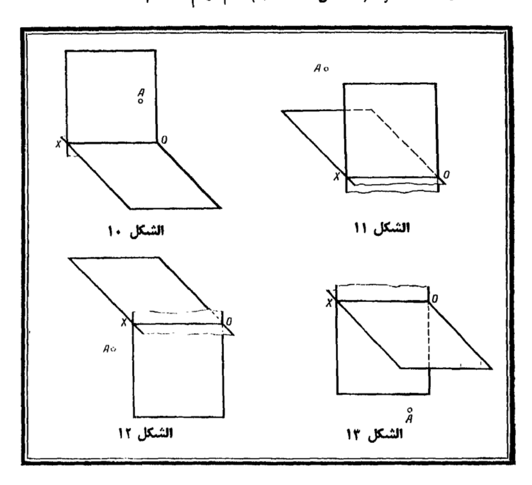
● **المثال ٥ :** لدينا نقطة A والمسقط الأفقي لنقطة B . في أي ربع توجد النقطة B إذا كان البعد بين مسقطيها الشاقوليين مساوياً 25 mm (الشكل ٩) .

الحل : قبل كل شيء يجب أن نوجد المسقط الشاقولي (b') للنقطة B . بما أن البعد بين المسقطين الشاقوليين للنقطتين يجب أن يساوي 25 mm لذا فالنقطة b' يجب أن تقع على محيط دائرة نصف قطرها 25 mm ومرسومة من النقطة a'. بالإضافة إلى ذلك فالنقطة b' يجب أن تقع على عمود نازل على خط الأرض من النقطة b. بهذا الشكل فالنقطة b' ستكون نقطة تقاطع العمود مع الدائرة . هناك نقطتان تحققان الطلب b'_1 و b' فالنقطة B يمكن أن تقع في الربع الأول أو الرابع . في حالة خاصة يمكن أن نحصل على حل وحيد (متى ؟) . أو يمكن أن لا نحصل على أي حل (متى ؟) .

مسائل

١ — ارسم مسقطي نقطة A موجودة في الربع الأول ، الثاني ، الثالث ، الرابع ثم ارسم مخططاتها (الشكل ١٠ — ١٣) .

٢ – ارسم مسقطي نقطة A وفقاً للشرط $z = 0$ (الشكل ١٠ ، ١٢) . ووفقاً للشرط $y = 0$ (الشكل ١١ ، ١٣) ثم ارسم مخططاتها .



الشكل ١٠

الشكل ١١

الشكل ١٢

الشكل ١٣

٣ – ارسم مخطط نقطة A حسب الإحداثيات المعطاة .

y	15	25	25	– 25	– 20	– 30	35	0	– 30	0
z	25	– 40	– 25	– 15	35	30	0	– 30	0	30

٤ – ارسم مخطط نقطة A موجودة في الربع المبين إذا أعطي أحد مسقطيها والعلاقة بين الإحداثيات ($y = z + n$) (الشكل ١٤ – ١٧) .

٥ – ارسم مخطط نقطة A موجودة في الربع المبين إذا أعطي أحد مسقطيها ونسبة

البعد من هذه النقطة حتى مستوي الإسقاط $(\frac{z}{y} = m)$ (الشكل ١٨ – ٢١).

a o
X —— 0
الربع I n=15
a o

الشكل ١٤

X —— 0
الربع IV n=20
a' o

الشكل ١٥

a o
X —— 0
الربع II n=10

الشكل ١٦

X —— 0
الربع III n=25
a' o

الشكل ١٧

a' o
X —— 0
الربع I m=2

الشكل ١٨

X —— 0
الربع IV m=1.5
a o

الشكل ١٩

a' o
X —— 0
الربع II m=1

الشكل ٢٠

a o
X —— 0
الربع III $m=\frac{3}{2}$

الشكل ٢١

b' o
X —— 0
a
a'

الشكل ٢٢

٦ – ارسم مخطط نقطـــة B المناظرة للنقطـة A (– 25 , 30) بالنسبة لمستوي الإسقاط الأفقي ، لمستوي الإسقاط الشاقولي ، لخط الأرض.

٧ – لدينا نقطة A والمسقط الشاقولي للنقطة B . في أي ربع توجد النقطة B إذا كان البعد بين مسقطيها الأفقيين 25 mm (الشكل ٢٢)؟

البحث الثالث

المستقيم

في الفراغ	على المخطط
١ ـ المستقيم موازي لمستوي الإسقاط الأفقي .	المسقط الشاقولي للمستقيم يوازي خط الأرض ، أما المسقط الأفقي فيشكل مع خط الأرض زاوية ما .
٢ ـ المستقيم موازي لمستوي الإسقاط الشاقولي .	المسقط الأفقي للمستقيم يوازي خط الأرض ، أما المسقط الشاقولي فيشكل مع خط الأرض زاوية ما .
٣ ـ المستقيم موازي لخط الأرض .	مسقطا المستقيم موازيان لخط الأرض .
٤ ـ المستقيم واقع في مستوي عمودي على خط الأرض (جنبي) .	مسقطا المستقيم يقعان على عمود واحد على خط الأرض .
٥ ـ المستقيم عمودي على مستوي الإسقاط الأفقي (شاقولي) .	المسقط الأفقي للمستقيم عبارة عن نقطة . أما المسقط الشاقولي فمستقيم عمودي على خط الأرض .
٦ ـ المستقيم عمودي على مستوي الإسقاط الشاقولي (أمامي) .	المسقط الشاقولي للمستقيم عبارة عن نقطة . أما المسقط الأفقي فمستقيم عمودي على خط الأرض .

مسائل

٨ ـ ارسم مسقطي مستقيم AB وارسم مخططه إذا كان :

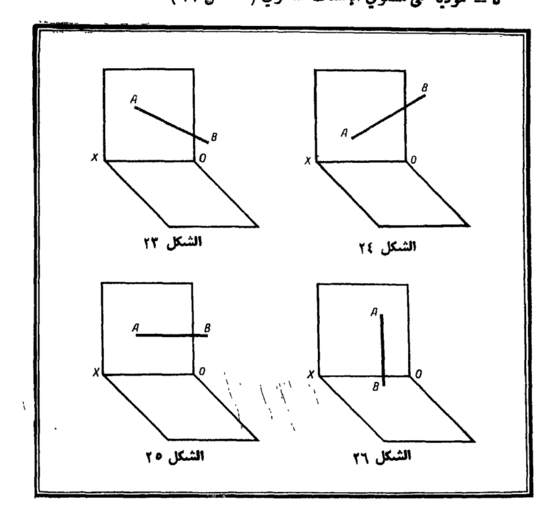
١ ـ موازياً لمستوي الإسقاط الأفقي (الشكل ٢٣) .

٢ ـ موازياً لمستوي الإسقاط الشاقولي (الشكل ٢٤) .

٣ ـ موازياً لخط الأرض (الشكل ٢٥) .

٤ ـ عمودياً على مستوي الإسقاط الأفقي (الشكل ٢٦) .

٥ ـ عمودياً على مستوي الإسقاط الشاقولي (الشكل ٢٧) .



الشكل ٢٣ الشكل ٢٤ الشكل ٢٥ الشكل ٢٦

ـ اقرأ مخططات القطعة AB (أملىء الفراغات) :

١ ـ القطعة AB موجودة في الربع (؟) ونهايتها A ترتكز على الحقل (؟) لمستوي الإسقاط (؟) (الشكل ٢٨) .

٢ ـ القطة AB موجودة في الربع (؟) ونهايتها A ترتكز على (؟) (الشكل٢٩).

٣ ـ القطعة AB موجودة في الربع (؟) وتوازي مستوي الإسقاط (؟) وإن نهايتها A ترتكز على مستوي الإسقاط (؟) (الشكل ٣٠) .

٤ ـ القطعة AB موجودة في الربع (؟) عمودية على مستوي الإسقاط (؟) ترتكز نهايتها B على الحقل (؟) لمستوي الإسقاط (؟) (الشكل ٣١) .

٥ ـ القطعة AB موجودة في الربع (؟) ، ترتكز نهايتها A على الحقل (؟) لمستوي الإسقاط (؟) (الشكل ٣٢) .

٦ ـ القطعة AB تقع في الحقل (؟) لمستوي الإسقاط (؟) (الشكل ٣٣) .

٧ ـ القطعة AB موجودة في الربع (؟) موازية لمستوي الإسقاط (؟) وطرفها A يرتكز على الحقل (؟) لمستوي الإسقاط (؟) (الشكل ٣٤) .

٨ ـ القطعة AB موجودة في الربع (؟)عمودية على مستوي الإسقاط (؟)وترتكز في نهايتها A على الحقل (؟) لمستوي الإسقاط (؟) (الشكل ٣٥) .

٩ ـ القطعة AB موجودة في الربع (؟) موازية (؟) (الشكل ٣٦) .

١٠ ـ القطعة AB تقع في الحقل (؟) لمستوي الإسقاط (؟) (الشكل ٣٧) .

١١ ـ القطعة AB موجودة في الربع (؟) وترتكز في نهايتها A على الحقل (؟) لمستوي الإسقاط (؟) وفي نهايتها B على الحقل (؟) لمستوي الإسقاط (؟) (الشكل ٣٨) .

١٢ ـ القطعة AB تقع في الحقل (؟) لمستوي الإسقاط (؟) وتوازي (؟) (الشكل ٣٩).

١٣ ـ القطعة AB تقع في الحقل (؟) لمستوي الإسقاط (؟) موازيـة (؟) (الشكل ٤٠).

١٠ ـ ارسم مخطط القطعة AB إذا كانت :

١ ـ في الوضعية العامة وموجودة في الربع الثاني وترتكز في نهايتها A على مستوي الإسقاط الشاقولي .

٢ ـ موجودة في الربع الأول وتوازي مستوي الإسقاط الشاقولي وترتكز في نهايتها A على مستوي الإسقاط الأفقي .

٣ ـ واقعة بصورة إعتباطية في الحقل الأمامي لمستوي الإسقاط الأفقي .

٤ ـ موجودة في الربع الرابع عمودية على مستوي الإسقاط الأفقي ونهايتها A على بعد واحد عن مستويي الاسقاط .

٥ ـ موجودة في الربع الثالث وتوازي مستوي الإسقاط الأفقي ونهايتها A ترتكز على مستوي الإسقاط الشاقولي .

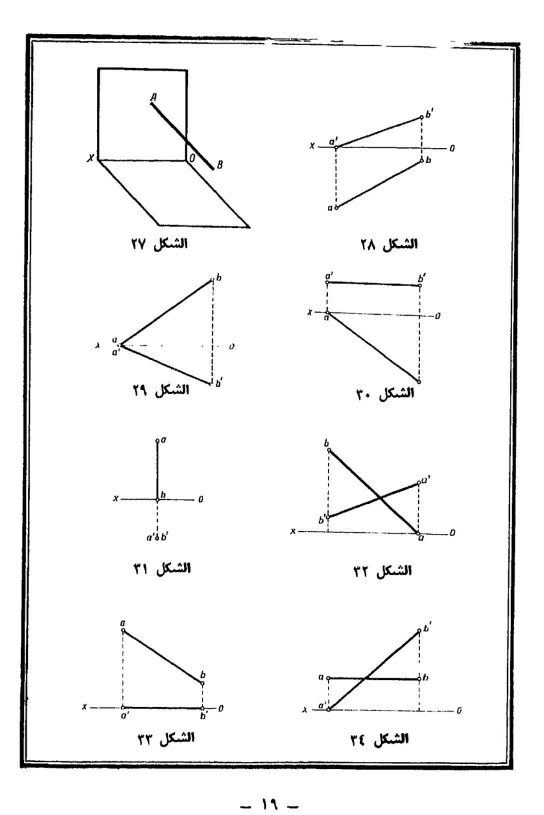
٦ ـ موجودة في المستوي المنصف للربع الأول وتوازي خط الأرض .

٧ ـ موجودة في الربع الرابع وتوازي مستوي الإسقاط الشاقولي ، ونهايتها A على بعد واحد عن مستويي الإسقاط .

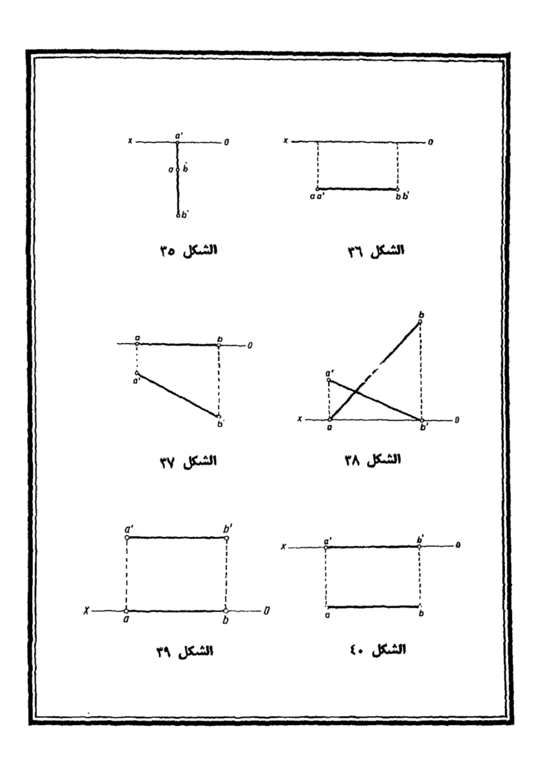
٨ ـ في الوضعية العامة وموجودة في الربع الثالث وترتكز في نهايتها A على مستوي الإسقاط الأفقي ، ونهايتها B على بعد واحد من مستويي الإسقاط .

٩ ـ تقع في الحقل العلوي لمستوي الإسقاط الشاقولي وتوازي خط الأرض .

١٠ ـ موجودة في الربع الثاني وترتكز في نهـايتها A على خط الأرض



الشكل ٢٧
الشكل ٢٨
الشكل ٢٩
الشكل ٣٠
الشكل ٣١
الشكل ٣٢
الشكل ٣٣
الشكل ٣٤



الشكل ٣٦

الشكل ٣٥

الشكل ٣٨

الشكل ٣٧

الشكل ٤٠

الشكل ٣٩

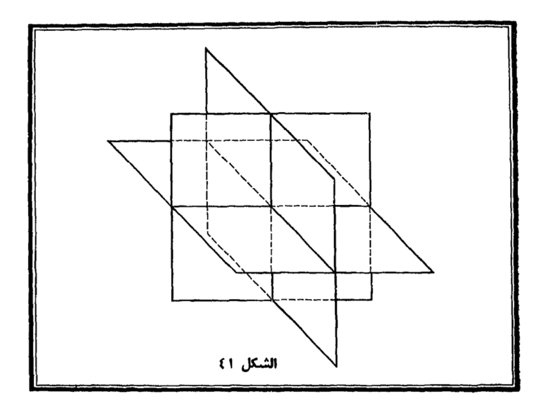
ونهايتها B على بعد واحد عن مستويي الإسقاط .

١١ — موجودة في الرابع الثالث عمودية على مستوي الإسقاط الشاقولي وترتكز في نهايتها B على مستوي الإسقاط .

البحث الرابع

الإسقاط على مستويات الإسقاط الثلاث

أرسم ثلاث مستويات مستعملة في الإسقاط القائم كمستويات إسقاط ، سجل عليها التسميات والرموز وخطوط الأرض والحقول والأرباع الفراغية (الشكل ٤١) .



الشكل ٤١

V (أو V_1 , V_2 , V_3) ؛ W (أو W_1 , W_2 , W_3)؛ $\pm OX , \pm OY , \pm OZ$ ؟

١٠ – ماهي ميزة جميع نقاط مستوي الإسقاط الأفقي ، الشاقولي ، الجنبي ؟

١١ – أين يمكن أن توجد نقطة في الفراغ إذا كان مسقطها الأفقي يقع على H (أو H_1 , H_2 , H_3) أما مسقطها الشاقولي فيقع على V (أو V_1 , V_2 , V_3) أمامسقطها الجنبي فيقع على W(أو W_1 , W_2 , W_3) ؟

١٢ – أي الحقول ستصبح بعد إنطباقها فوق المحور ox ، تحت المحور ox ، على يمين المحور oz ، على يسار المحور oz ؟

١٣ – ارسم في وضعية الإنطباق حقول مستويات الإسقاط المحدّدة للربع الأول ، الثاني . . . الثامن ؟

١٤ – أي نقطة في الفراغ سيكون مسقطها الأفقي على المخطط فوق المحور ox ، تحت المحور ox ، على يسار oz ، على يمين oz ؟

١٥ – أي نقطة في الفراغ سيكون مسقطها الشاقولي على المخطط فوق المحور ox ، تحت المحور ox ، على يسار oz ، على يمين oz ؟

١٦ – أي نقطة في الفراغ سيكون مسقطها الجنبي على المخطط فوق المحور ox تحت المحور ox ، على يسار oz ، على يمين oz ؟

١٧ – أي نقطة غير واقعة على خط الأرض يمكن إنطباق مسقطيها الأفقي والشاقولي ، الشاقولي والجنبي ، المساقط الثلاث ؟

قبل أن تجيب على الأسئلة التالية (١٨ – ٢٨) ارسم مساقط النقطة A

الثلاثة في الربـع الأول بصورة فراغية بالإضافة إلى المخطط (الشكل ٤٢) .

١٨ ـ أي الإحداثيات تعين المسقط الأفقي للنقطة ، الشاقولي ، الجنبي ؟

١٩ ـ ما هي مساقط النقطة التي تتوضع بعد تطبيق مستويات الإسقاط على عمود واحد على ox ، oz ؟

٢٠ - ماهي طريقة إيجاد المسقط الثالث لنقطة إذا علم مسقطان ؟ كيف يمكن مثلًا إيجاد المسقط الجنبي لنقطة إذا علم المسقط الأفقي والشاقولي ؟

٢١ ـ بماذا يقاس على المخطط بعد نقطة في الفراغ عن مستوي الإسقاط الجنبي ؟

٢٢ ـ ماذا يعني إنعدام إحداثيتين لنقطة (مثلًا x = o , z = o) ؟

٢٣ ـ ماذا يعني إنعدام إحدى الإحداثيات لنقطة (مثلًا y = o) ؟

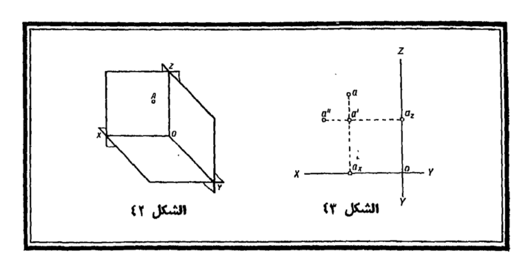
٢٤ ـ في أي الأرباع تكون الإحـداثية x للنقطة موجبة ، سالبة ؟

٢٥ ـ في أي الأرباع تكون الإحـداثية y للنقطة موجبة ، سالبة ؟

٢٦ ـ في أي الأرباع تكون الإحـداثية z للنقطة موجبة ، سالبة ؟

٢٧ - ماهي إشارات الإحداثيات x , y , z لنقطة موجودة في الربـع الأول ... الثـــامن ؟

٢٨ ـ كيف نأخذ على المخطط :قطعة تعين الإحداثية x إذا كانت موجبـة ، سالبة ، قطعـة تعين الإحـداثية y ، عند تعيين المسقط الجنبي للنقطة ، إذا كانت هذه الإحـداثية موجبة ، سالبة ؟



الشكل ٤٢ الشكل ٤٣

أمثلــة

● **المثال ٦ :** ارسم مخطط النقطة (15 ، 24- ، 15) A (الشكل ٤٣) .

الحل : نأخذ على المحور الموجب ox قطعة oa_x بطـول 15 mm (x) ونمرر من النقطة a_x عموداً على المحور ثم نأخذ عليـه ونحو الأعلى قطعة a_xa بطول 24 mm (y) وقطعـة a_xa' بطول 15 mm (z) . لتعيين المسقط الجنبي (a″) النقطة نمرر من النقطة a′ عموداً على المحور oz ونأخذ عليـه من الجهـة اليسرى قطعة a_za'' بطول 24 mm (y) .

● **المثال ٧ :** لدينا نقطة (15 - 24 - ، 15 -)A . ارسم مخطط النقطة B نظيرة النقطة A بالنسبة لمستوي الإسقاط : الأفقي (الشكل ٤٤) ، الشاقولي (الشكل ٤٥) ، الجنبي (الشكل ٤٦) .

الحل : النقطة A موجودة على يمين مستوي الإسقاط الجنبي وخلف مستوي الإسقاط الشاقولي وتحت مستوي الإسقاط الأفقي أي في الربع السابع . لنرسم مخططها .

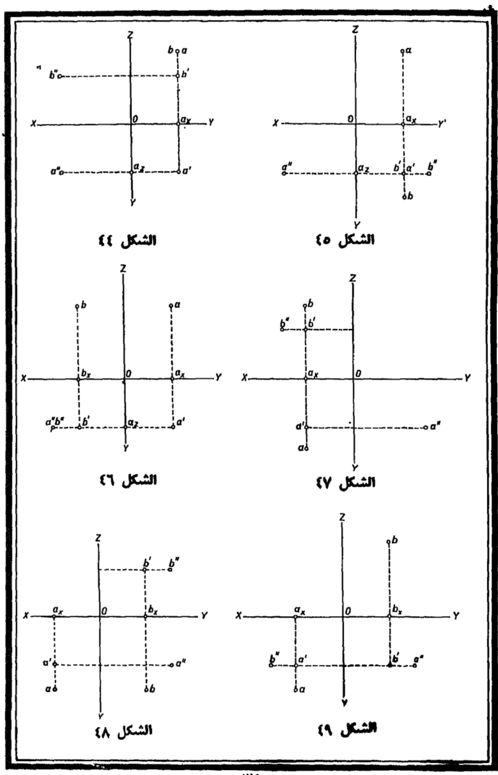
لنأخذ على المحور السالب ox قطعة oa_x بطول 15 mm (x) ثم نمرر من النقطة a_x عموداً على المحور ox ونأخذ عليه القطعة a_xa نحو الأعلى وبطول 24 mm (y) ونحو الأسفل قطعة a_xa' بطول 15 mm (z) ثم نرسم من النقطة a' مستقيماً عمودياً على المحور oz ونأخذ عليه من الجهة اليسرى قطعة a_za'' بطول 24 mm (y) .

١ ـ النقطة B مناظرة للنقطة المعطاة بالنسبة لمستوي الإسقاط الأفقي وموجودة في الربع السادس (15 , 24 - , 15 -) B . نأخذ على عمود عـام ونحو الأعلى قطعة a_xb بطول 24 mm (y) وقطعة a_xb' بطول 15 mm (z) ثم نوجد المسقط الجنبي (b'') للنقطة B .

٢ ـ النقطة B مناظرة للنقطة المعطاة بالنسبة لمستوي الإسقاط الشاقولي ، وموجودة في الربـع الثامن (15- ,24 + , 15 -) B . نرسم كما ذكرنا سابقاً مخطط النقطة A ، نأخذ على عمود عام ونحو الأسفل قطعة a_xb بطول 24 mm (y) ، وقطعة a_xb' بطول 15 mm (z) . ثم نمرر من b' عموداً على المحور oz ونأخذ عليه من جهة اليمين قطعة a_zb'' بطول 24 mm (y) .

٣ ـ النقطة B مناظرة للنقطة المعطاة بالنسبة لمستوي الإسقاط الجنبي وموجودة في الربع الثالث (15 - ، 24 - ، 15) B . نرسم كالسابق مخطط النقطة A ونأخذ على المحور الموجب ox قطعة ob_x بطول 15 mm (x) ثم نمرر من النقطة b_x عموداً على المحور ox ونأخذ عليـه قطعة b_xb نحو الأعلى بطول 24 mm (y) ونحو الأسفل b_xb' بطول 15 mm (z) . بعد ذلك نوجد(b'')للنقطة B .

● **المثال ٨** : لدينا نقطة (15 - ، 24 ، 15) A . ارسم مخطط النقطة B المناظرة للنقطة A بالنسبة للمحاور ox (الشكل ٤٧) ، oy (الشكل ٤٨) ، oz (الشكل ٤٩) .



الشكل ٤٤

الشكل ٤٥

الشكل ٤٦

الشكل ٤٧

الشكل ٤٨

الشكل ٤٩

الحل : النقطة A موجودة على يسار المستوي الجنبي وأمام مستوي الإسقاط الشاقولي وتحت مستوي الإسقاط الأفقي أي في الربع الرابع . لنرسم مخططها . لنأخذ على المحور الموجب ox قطعة oa_x بطول 15 mm (x) ، ثم نمرر من النقطة a_x عموداً على ox ونأخذ عليه من الجهة السفلى قطعة a_xa بطول 24 mm (y) وقطعة a_xa' بطول 15 mm (z). بعد ذلك نوجد المسقط الجنبي ("a) للنقطة A .

١ – النقطة B المناظرة للنقطة المعطاة بالنسبة للمحور ox موجودة في الربع الفراغي الثاني أي (15 , 24 - , 15) B . نأخذ على عمود عام من الجهة العليا قطعة a_xb بطول 24 mm (y) وقطعة a_xb' بطول 15 mm (z) ثم نوجد المسقط الجنبي ("b) للنقطة B .

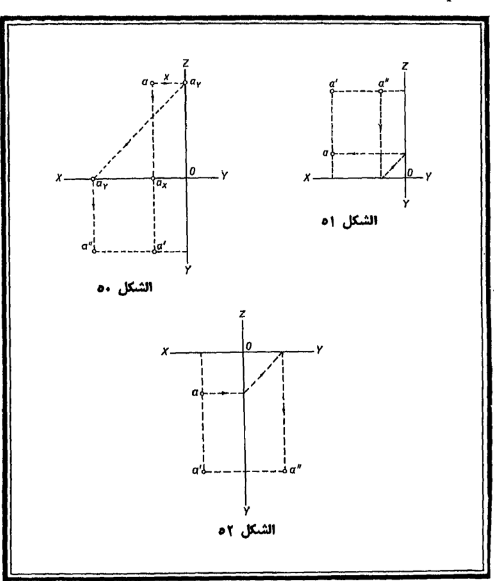
٢ – النقطة B المناظرة للنقطة المعطاة بالنسبة للمحور oy موجودة في الربع الفراغي الخامس (15 , 24 , 15 -)B . لنرسم كما مر سابقاً مخطط النقطة A ولنأخذ على المحور السالب ox قطعة ob_x بطول 15 mm (x) ثم نمرر من النقطة b_x عموداً على ox ونأخذ عليه قطعة b_xb من الجهة السفلى وبطول 24 mm (y) وقطعة b_xb' من الجهة العليا بطول 15 mm (z) . بعد ذلك نوجد المسقط الجنبي ("b) للنقطة B .

٣ – النقطة B المناظرة للنقطة المعطاة بالنسبة للمحور oz موجودة في الربع الفراغي السابع أي (15 - , 24 - , 15 -) B . نرسم مخطط النقطة A ونأخذ على المحور السالب ox قطعة ob_x بطول 15 mm (x) ثم نمرر من النقطة b_x عموداً على ox ونأخذ عليه قطعة b_xb من الجهة العليا بطول 24 mm (y) ، ومن الجهة السفلى b_xb' بطول 15 mm (z) . بعد ذلك نوجد ("b) للنقطة B .

● **المثال ٩** : لدينا المسقط الأفقي (a) للنقطة A الموجودة في الربع الثالث . أوجد المسقطين الآخرين مع العلم أن $z = x + 12$ mm (الشكل ٥٠) .

الحل : المسقط الشاقولي('a) يجب أن يقع تحت المحور ox وعلى عمود مقام عليه ومار

من المسقط الأفقي للنقطة . إن الإحـداثية x تعين البعد من المسقط الأفقي (a)حتى المحور oz . وإن الإحـداثية z تعين البعد من المسقط الشاقولي ('a) حتى المحور ox .
لذلك نمرر من النقطة a مستقيماً عمودياً على المحور ox حتى يتقاطع معه في النقطة a_x .



الشكل ٥٠

الشكل ٥١

الشكل ٥٢

اعتباراً من النقطة a_x نأخذ على هذا العمود ومن الجهة السفلى قطعة $a_x a'$ مساوية

$aa_1 + 12\ mm$ ، فنهاية القطعة تعطينا المسقط الشاقولي (a') للنقطة . بعد ذلك نوجد المسقط الثالث (a'').

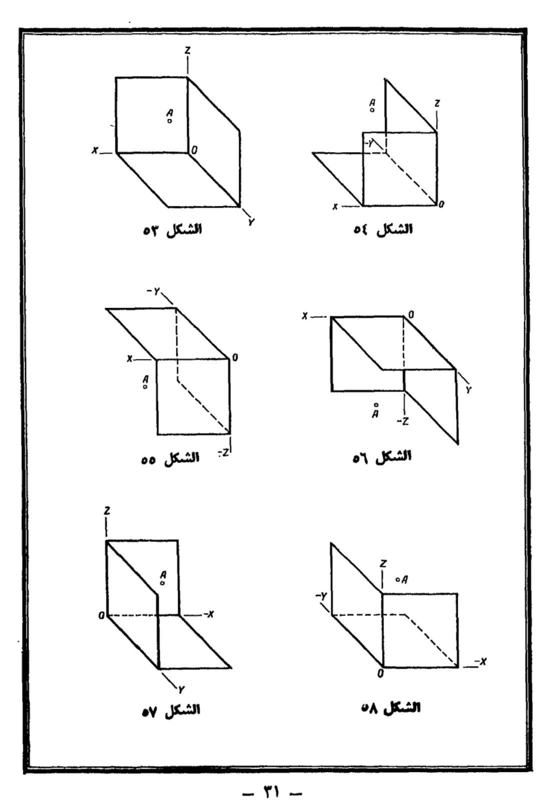
● **المثال ١٠** : ارسم المحور oz والمسقط الأفقي للنقطة A الموجودة في الربع الثاني إذا علمت المسقطين a'' و a والنسبة $\frac{x}{y} = 3$ (الشكل ٥١) .

الحل : إن المساقط المعطاة للنقطة A يجب أن تقع على يسار المحور oz . بما أن بعد المسقط الشاقولي (a') عن oz هو x ، وأن بعد المسقط الجنبي (a'') عن oz هو y لذا فالقطعة الواقعة بين المسقطين a' ، a'' ستساوي إلى الفرق (x − y) ، وباستعمال النسبة المعطاة $\frac{x}{y} = 3$ نشكل التناسب $2 = \frac{3-1}{1} = \frac{x-y}{y}$ ومنه $y = \frac{x-y}{2}$.

والآن يبقى أن نقسم القطعة $a'a''$ إلى قطعتين متساويتين ونرسم محوراً oz عمودياً على المحور ox وعلى بعد $\frac{a'a}{2}$ من الجهة اليمنى للمسقط الجنبي (a'') ، ثم نوجد المسقط الأفقي (a) للنقطة A .

● **المثال ١١** : أنشىء المحور ox والمسقط الجنبي للنقطة A الموجودة في الربع الرابع إذا علمت المسقطين a ، a' والنسبة $\frac{1}{3} = \frac{y}{z}$ (الشكل ٥٢) .

الحل : إن المساقط المعطاة للنقطة A يجب أن تقع تحت المحور ox . بما أن البعد من المسقط الأفقي للنقطة حتى المحور ox هو y وبما أن المسافة من المسقط الشاقولي للنقطة حتى المحور ox هو z لذلك فالقطعة الواقعة بين مسقطي النقطة أي aa' ستساوي إلى الفرق (z − y) ، فباستعمال الشرط المعطى $\frac{y}{z} = \frac{1}{3}$



الشكل ٥٣

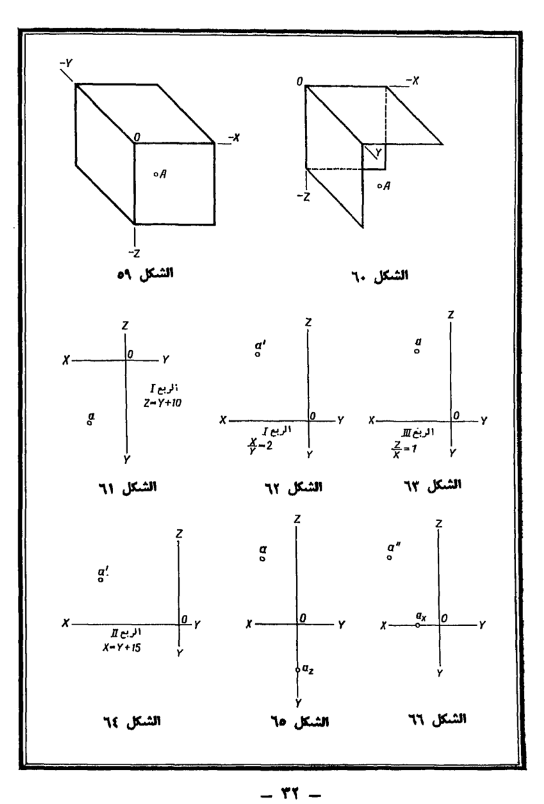
الشكل ٥٤

الشكل ٥٥

الشكل ٥٦

الشكل ٥٧

الشكل ٥٨



-Y
0
-X
A
-Z
الشكل ٥٩
0
-X
Y
A
-Z
الشكل ٦٠
Z
X
0
Y
الربع I
Z=Y+10
a
Y
الشكل ٦١
Z
a'
X
0
Y
الربع I
X/Y=2
Y
الشكل ٦٢
Z
a
X
0
Y
الربع III
Z/X=1
Y
الشكل ٦٣
Z
a'
X
0
Y
الربع II
X=Y+15
Y
الشكل ٦٤
Z
a
X
0
Y
a_z
Y
الشكل ٦٥
Z
a''
X
a_x
0
Y
Y
الشكل ٦٦

نشكل تناسباً يدخل فيه الفرق $z - y$ وتبعاً لذلك نكتب الشرط $\frac{1}{3} = \frac{y}{z}$ بالشكل $\frac{3}{1} = \frac{z}{y}$ ومنه $2 = \frac{3 - 1}{1} = \frac{z - y}{y}$ أو $y = \frac{z - y}{2}$.

والآن يبقى أن نقسم القطعة aa' إلى قسمين متساويين ثم نوسم المحور ox فوق النقطة a على بعد $\frac{a\,a'}{2}$ ، وبعد ذلك نوجد المسقط الجانبي(a'')للنقطة A .

مسائل

١١ – ارسم مساقط النقطة A الموجودة في الربع الأول ، الثاني ... الخ ثم ارسم مخططاتها (الشكل ٥٣ – ٦٠) .

١٢ – ارسم مساقط النقطة A من الشرط $z_A = o$ (الشكل ٥٣ ، ٥٥ ، ٥٨ ، ٦٠) ومن الشرط $y_A = o$ (الشكل ٥٤ ، ٥٦ ، ٥٧ ، ٥٩) ومن الشرط $x_A = o$ (الشكل ٥٤ ، ٥٦ ، ٥٧ ، ٥٩) ثم ارسم مخططاتها .

١٣ – ارسم مخططات النقطة A حسب الإحداثيات المعطاة .

x	20	15	15	20	– 15	– 20	– 20	– 15	25	– 25
y	15	–25	–25	20	25	– 15	– 15	25	– 25	25
z	25	35	- 20	– 30	20	25	– 25	– 35	25	– 25
x	15	–15	20	– 15	0	0	0	0	0	– 20
y	–25	25	0	0	– 20	25	– 20	– 20	0	0
z	0	0	- 30	30	30	–35	20	0	20	0

١٤ ــ أوجد المساقط الناقصة للنقطة A إذا كان معلوماً أحد المساقط ، والنسبة بين إحداثيات النقطة ، والربع الفراغي حيث توجد النقطة (الشكل ٦١ ــ ٦٦) .

١٥ ــ ارسم محور الإسقاط الناقص وعين مسقط النقطة A إذا أعطيت النسبة بين إحداثياتها (الشكل ٦٧ ــ ٧٢)

١٦ ــ ارسم المسقط الثالث للمستقيم AB من المثلث ABC (الشكل ٧٣ - ٧٨) .

١٧ ــ أنشيء مساقط المثلث ABC إذا أعطيت إحداثيات رؤوسه :

A (20 , 0 , 0) ، B (0 , 30 , 0) ، C (0 , 0 , 25) .

١٨ ــ أنشيء مساقط المثلث ABC إذا أعطيت إحــداثيــات رؤوسه :

A (20 , 30 , 0) ، B (20 , 0 , 30) ، C (0 , 20 , 30) .

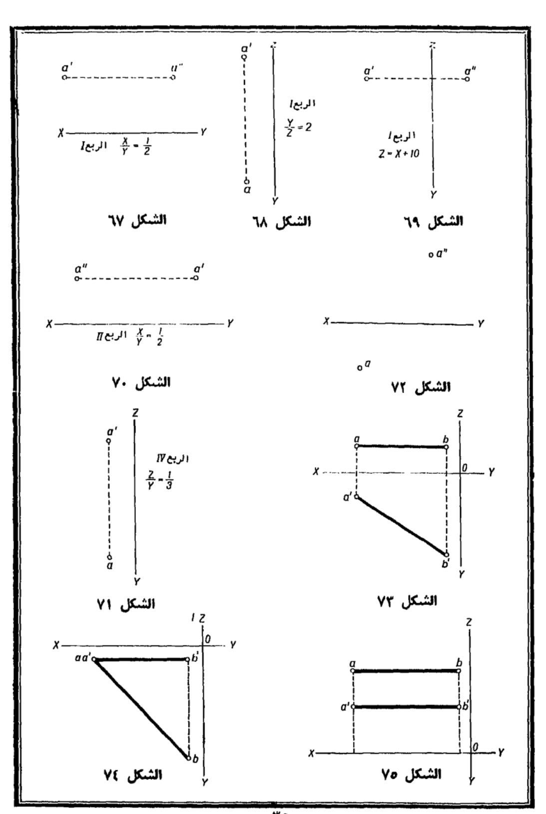
١٩ ــ لدينا النقطة ([illegible] , 30 , 20) A . ارسم مخطط النقطة B المناظرة للنقطة A بالنسبة لمستوي الإسقاط الأفقي ، الشاقولي ، الجنبي (ارسم ثلاث مخططات) .

٢٠ ــ لدينا النقطة (20 , 30 , 20) A . ارسم مخطط النقطة B المناظرة للنقطة A بالنسبة للمحاور oz , oy , ox (ارسم ثلاث مخططات) .

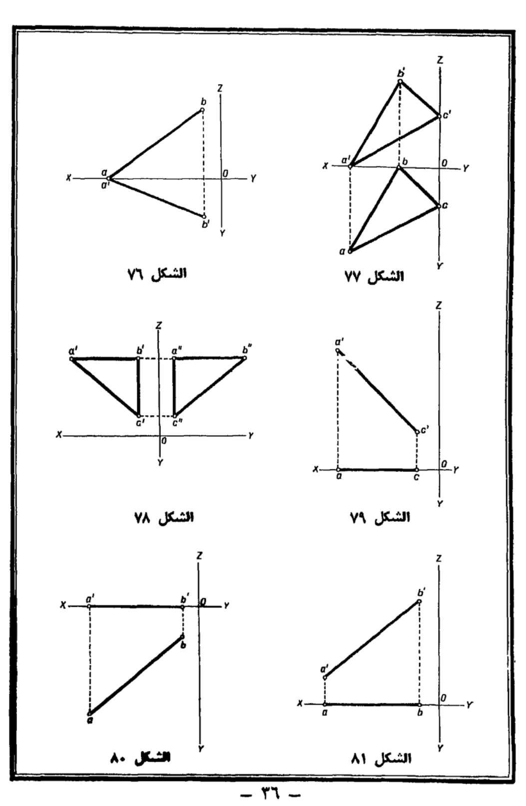
٢١ ــ ارسم مساقط المكعب ذي القاعدة ABCD الواقعة في مستوي الإسقاط الشاقولي إذا علم لدينا القطر AC للقاعدة ثم بين مساقط كل وجه وكل ضلع (الشكل ٧٩) .

٢٢ ــ ارسم مساقط موشور قائم مثلثي منتظـم ، إرتفاعه 50 mm إذا علمت الضلع AB من قاعدته الواقعة في مستوي الإسقاط الأفقي . بين مساقط كل وجه وكل ضلع (الشكل ٨٠) .

٢٣ ــ ارسم مساقط هرم قائم مثلثي منتظم ، إرتفاعه 60 mm



a'
a''
X
Y
الربع I
X/Y = 1/2
Z
الربع I
Y/Z = 2
a
الربع I
Z = X + 10
الشكل ٦٧
الشكل ٦٨
الشكل ٦٩
الربع II
الشكل ٧٠
الشكل ٧٢
الربع IV
Z/Y = 1/3
0
b
b'
الشكل ٧١
الشكل ٧٣
aa'
الشكل ٧٤
الشكل ٧٥



الشكل ٧٦

الشكل ٧٧

الشكل ٧٨

الشكل ٧٩

الشكل ٨٠

الشكل ٨١

إذا علمت الضلع AB من قاعدته الواقعة في مستوي الإسقاط الشاقولي .
بين مساقط كل وجه وكل ضلع (الشكل ٨١) .

٢٤ ــ ارسم مساقط إسطوانة قائمة ذات قاعــدة واقعة في مستوي الإسقاط الشاقولي ومركزها (30 و 0 و 30) C إذا أعطي إرتفاعــها 60 mm ونصف قطر قاعدتها يساوي 20 mm .

٢٥ ــ ارسم المحل الهندسي للمستقيمات المارة من النقطة (50 و 30 و 30) S والمشكلة مع مستوي الإسقاط الأفقي زاوية 70° .

٢٦ ــ ارسم المحل الهندسي للنقاط التي تبعد عن النقطة (35 و 30 و 30) C بمقدار 20 mm .

البحث الخامس

الوضعية المشتركة للمستقيم والنقطة

في الفراغ	على المخطط
النقطة تقع على المستقيم	مساقط النقطة تقع على مساقط المستقيم الموافقة

مــلاحظــة : في حالة المستقيم الجنبي ، النظرية العكسية ستكون صحيحة فقط في الجملــة H ، V ، W . وفي حالة وجود مسقطين يجب التأكد من وقوع المسقط الجنبي للنقطة على المسقط الجنبي للمستقيم .

في الفراغ	على المخطط
المستقيم يمر من نقطة	مسقطا المستقيم يمران من مسقطي النقطة الموافقين

امثــــــلة

● **المثال ١٢ :** هل تقع النقاط A ، B ، C , D على المستقيم MN (الشكل ٨٢) .

الحل : المسقطان (a,a′) للنقطة A يقعان على المسقطين الموافقين للمستقيم (m n ، m′n′) ، بناء عليه فالنقطة A تقع على المستقيم MN · المسقطان (b,b′) للنقطة B يقعان على المسقطين غير الموافقين للمستقيم (mn , m′n′) بناء عليه فالنقطة B لاتقع على المستقيم MN وكذلك لا تقع على المستقيم MN النقطتان D,C (لماذا ؟) .

● **المثال ١٣ :** هل تقع النقطة C على المستقيم الجنبي AB (الشكل ٨٣) .

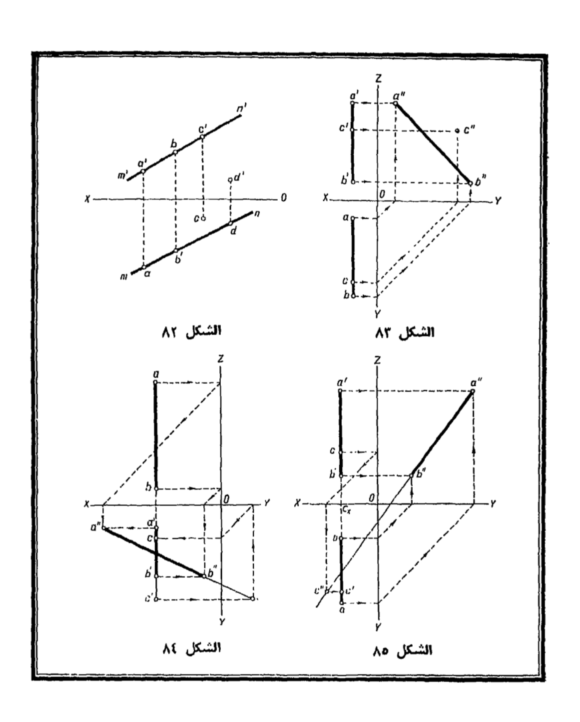
الحل : بما أن المستقيم المعطى جنبي لذا يجب أن نتحقق من الوضعية المشتركة للمسقط الجنبي للمستقيم والمسقط الجنبي للنقطة C . لنرسم المسقط الجنبي للمستقيم والمسقط الجنبي للنقطة سنرى أن المسقط الجنبي للنقطة لا يقع على المسقط الجنبي للمستقيم بناء عليه فالنقطة C لاتقع على المستقيم AB .

● **المثال ١٤ :** لدينا مستقيم جنبي AB والمسقط الشاقولي (c′) للنقطة C الواقعة على المستقيم ، أوجد المسقط الأفقي (c) لهذه النقطة (الشكل ٨٤) .

الحل : لكي يتسنى إيجاد المسقط الأفقي (c) للنقطة يلزمنا المسقط الجنبي (c″) الذي يجب أن يقع على المسقط الجنبي (a″ b″) للمستقيم وعلى مستقيم عمودي على المحور oz ومرسوم من النقطة c′ . نعين المسقط الجنبي (a″ b″) للمستقيم ، وعند تقاطعه مع العمود على oz والموسوم من c′ نحصل على المسقط الجنبي (c″) للنقطة . بعد ذلك نوجد المسقط الأفقي (c) للنقطة .

● **المثال ١٥ :** لدينا المستقيم الجنبي AB والمسقط الأفقي (c) للنقطة C الواقعة على ذلك المستقيم . أوجد المسقط الشاقولي (c′) لهذه النقطة (الشكل ٨٥) .

الحل : كي نجد المسقط الشاقولي (c′) للنقطة يلزمنا مسقطها الجنبي (c″) الذي



الشكل ٨٢

الشكل ٨٣

الشكل ٨٤

الشكل ٨٥

يجب أن يقع على المسقط الجنبي للمستقيم (a″b″) ، وعلى بعد y من الجهة اليسرى (لماذا ؟) من المحور oz. ومنه نوجد المسقط الجنبي للمستقيم (a″ b″) وعند تقاطعه مع المستقيم الموازي للمحور oz الموسوم من الجهة اليسرى وعلى بعد c_xc (أي y) نحصل على المسقط الجنبي (c″) للنقطة ، بعد ذلك نوجد المسقط الشاقولي c′ للنقطة .

● **المثال ١٦ :** مرر من النقطة A و B مستقيماً (الشكل ٨٦) .

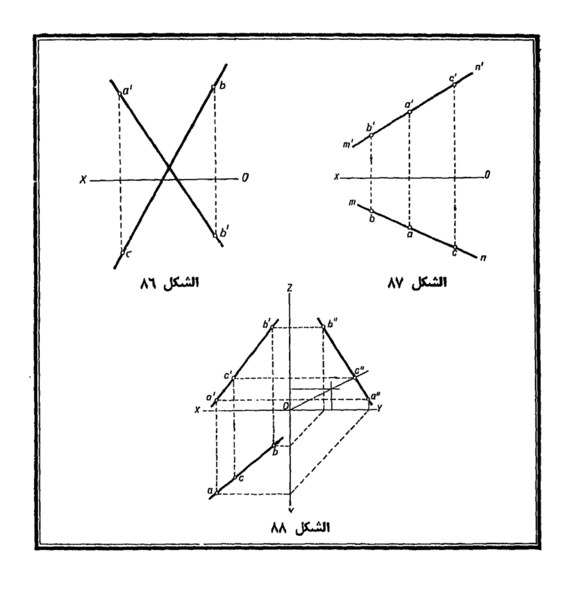
الحل : نرسم مسقطي المستقيم : الأفقي يمر من النقطة a و b والشاقولي يمر من a′ و b′ .

● **المثال ١٧ :** لدينا نقطة A ومساقط مختلفة للنقطتين C و B أوجد المساقط الناقصة للنقطتين C و B إذا علمت أن النقاط الثلاث تقع على المستقيم MN (الشكل ٨٧).

الحل : نرسم مسقطي المستقيم MN : الأفقي (mn) — عبر النقطة a و c .. الشاقولي (m′n′) — عبر النقطة a′ و b′ . بعد ذلك نوجد المسقط الأفقي (b) للنقطة B على المستقيم mn والمسقط الشاقولي (c′) للنقطة C على المستقيم m′n′ .

● **المثال ١٨ :** أوجد على المستقيم AB النقطة C إذا علمت النسبة $\frac{1}{2} = \frac{z}{y}$ (الشكل ٨٨) .

الحل : تعين الإحداثيات y و z المسقط الجنبي (c″) للنقطة C ، المحل الهندسي لنقاط المستوي في المجموعة z o y ذات النسبة $\frac{1}{2} = \frac{z}{y}$ هو خط مستقيم معادلته $y = 2z$. المسقط الجنبي (c″) للنقطة C يجب أن يقع على المسقط الجنبي (a″b″)



الشكل ٨٦

الشكل ٨٧

الشكل ٨٨

للمستقيم المعطى AB وعلى المستقيم $y = 2z$ أي عند تقاطعهما ، بناء عليـــه فمن

المساقط المعطاة للمستقيم AB نوجد مسقطه الجنبي (a″ b″) ، نوسم في المجموعة zoy المستقيم y = 2 z وعند تقاطعهما نحصل على المسقط الجنبي (c″) للنقطة C . بعد ذلك من c″ نوجد المسقط الأفقي والشاقولي للنقطة على المساقط الموافقة للمستقيم AB .

مسائل

٢٧ – أوجد على المستقيم AB نقطة ، إذا علم بعدها عن أحد مستويات الإسقاط (الشكل ٨٩ ، ٩١) .

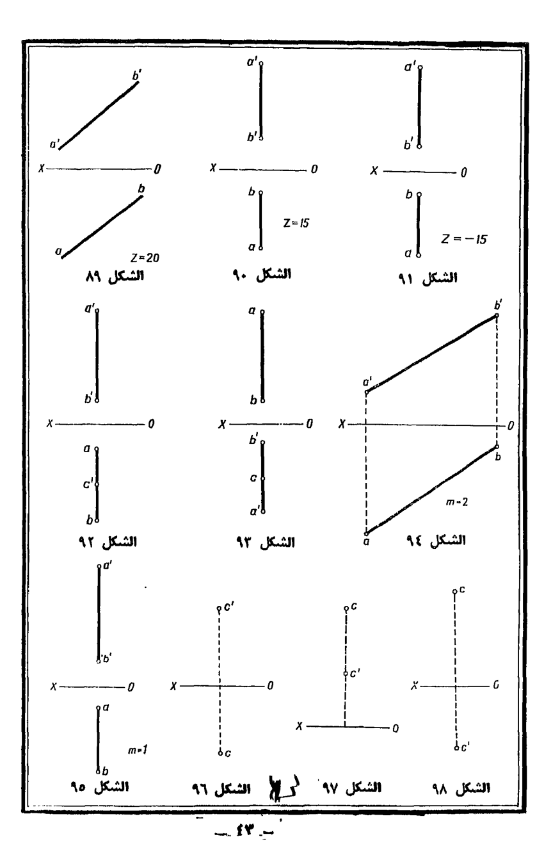
٢٨ – أوجد على المستقيم AB نقطة C علم احد مساقطها (الشكل ٩٢ و ٩٣).

٢٩ – ما هي الميزة المشتركة لجميع النقاط (على المخطط) الواقعة على مستقيم : أمامي ، شاقولي ، أو مستقيم عمودي على المستوي الجنبي ؟

٣٠ – هل يمكننا دائماً عند معرفة مسقط واحد لنقطة واقعة على مستقيم إيجاد المسقط الآخر في المجموعة V و H ، H , V , W ؟

٣١ – أوجد على المستقيم AB نقطة C نسبة إحداثياتها $\frac{z}{y} = m$ (الشكل ٩٤ و ٩٥) .

٣٢ – مرر من النقطة C مستقيماً AB يوازي مستوي الإسقاط الأفقي (الشكل ٩٦) ، يوازي مستوي الإسقاط الشاقولي (الشكل ٩٧) ، يوازي مستوي الإسقاط الجنبي (الشكل ٩٨) .


b'
a'
X
0
b
a
Z=20
الشكل ٨٩
a'
b'
X
0
b
Z=15
a
الشكل ٩٠
a'
b'
X
0
b
Z = −15
a
الشكل ٩١
a'
b'
X
0
a
c'
b
الشكل ٩٢
a
b
X
0
b'
c
a'
الشكل ٩٣
b'
a'
X
0
b
m=2
a
الشكل ٩٤
a'
b'
X
0
a
m=1
b
الشكل ٩٥
c'
X
0
c
الشكل ٩٦
c
c'
X
0
الشكل ٩٧
c
X
0
c'
الشكل ٩٨

البحث السادس

آثار المستقيم

آثار المستقيم هي نقاط تقاطع المستقيم مع مستويات الإسقاط . الأثر الأفقي للمستقيم هو نقطة تقاطعه مع مستوي الإسقاط الأفقي . الأثر الشاقولي للمستقيم هو نقطة تقاطعه مع مستوي الإسقاط الشاقولي ، نرمز للأثر الشاقولي للمستقيم بالحرف V أما لمسقطيه (v ، v′) ، نرمز للأثر الأفقي بالحرف H أما لمسقطيه (h ، h′) .

قاعدة : لإيجاد الأثر الأفقي لمستقيم نقوم بما يلي : نمدد المسقط الشاقولي للمستقيم حتى يقطع خط الأرض في النقطة h′ ، ومن هذه النقطة نرفع عموداً على خط الأرض حتى يتقاطع مع المسقط الأفقي للمستقيم في النقطة h . هذه النقطة هي الأثر الأفقي للمستقيم . لإيجاد الأثر الشاقولي لمستقيم نقوم بما يلي : نمدد المسقط الأفقي للمستقيم فيقطع خط الأرض في النقطة v ومن هذه النقطة نرفع عموداً على خط الأرض فيتقاطع مع المسقط الشاقولي للمستقيم في النقطة v′ . هذه النقطة هي الأثر الشاقولي للمستقيم .

ملاحظة : يمكننا وفق القاعدة السابقة وللمستقيم الجنبي إيجاد النقطتين v و h′ فقط . ولإيجاد v′ و h يجب تعيين v″ و h″ أولاً وذلك عند تقاطع a″ b″ مع المحورين oy ، oz . بعد ذلك نوجد h بمساعدة h″ و h′ ، ونوجد v′ بمساعدة v و v″ .

● **المثال ١٩ :** ارسم مساقط مستقيم إذا أعطيت آثاره (الشكل ٩٩) .

الحل : المستقيم المطلوب يمر من الآثار – V ، H بناء عليه فمساقط المستقيم يجب أن تمر من المساقط المماثلة لهـــذه النقاط . لنوجد المساقط (h , h') ، (v و v') لهذه النقاط ثم نرسم المسقط الأفقي للمستقيم عبر h و v والمسقط الشاقولي للمستقيم عبر h' و v' .

● **المثال ٢٠ :** أوجد آثار المستقيم AB وبين جزأه المرئي وغير المرئي (الشكل ١٠٠) .

الحل : نمدد المسقط الأفقي (a b) للمستقيم حتى يتقاطع مع المحور ox في نقطة v . ومن هذه النقطة نرفع عموداً على خط الأرض حتى يتقاطع مع المسقط الشاقولي للمستقيم في نقطة v' فنحصل على الأثر الشاقولي للمستقيم بعد ذلك نمـــدد المسقط الشاقولي (a' b') للمستقيم حتى يتقاطع مع خط الأرض في نقطة h' ومن هـذه النقطة نرفع عموداً على خط الأرض حتى يتقاطع مع المسقط الأفقي للمستقيم في نقطة h فنحصل على الأثر الأفقي للمستقيم . بناء عليه فالمستقيم المطلوب لـه أثر أفقي في الحقل الأفقي الخلفي . وأثر شاقولي في الحقل الشاقولي العلوي ، هذا المستقيم يمر من الربع الأول والثاني والثالث ، القطعة الكائنة بين الأثرين غير مرئية أما بعد الأثر الشاقولي للمستقيم فمرئية ،أما بعد الأثر الأفقي فغير مرئية .

● **المثال ٢١ :** لدينا مستقيم جنبي AB أوجد آثاره (الشكل ١٠١) .

الحل : نمدد المساقط المعطـــاة حتى تقاطعها مع خط الأرض في النقاط h' و v . نرسم المسقط الجنبي للمستقيم ونمدده فيتقاطع مع المحور oy في النقطة h" ، ومـــع

المحور oz في النقطة v'' وبعد ذلك نوجد h بمساعدة h' و h'' . ونوجد v' بمساعدة v و v'' .

● **المثال ٢٢** : ارسم مساقط مستقيم علمت آثاره H و W . أوجد الأثر الشاقولي للمستقيم ثم بيّن الجزء المرئي منه والجزء غير المرئي (الشكل ١٠٢) .

الحل : من الآثار المعطاة H و W نوجد مساقطها. نرسم مسقطي المستقيم المطلوب عبر المساقط المماثلة للنقاط H و W . لكي نحصل على الأثر الشاقولي للمستقيم نوجد النقطة v تقاطع المسقط الأفقي للمستقيم مع المحور ox ثم نرفع من هذه النقطة عموداً على المحور حتى تقاطعه في النقطة v' مع المسقط الشاقولي للمستقيم ، وهكذا نحصل على الأثر الشاقولي للمستقيم . المستقيم غير مرئي .

مسائل

٣٣ – عدد المستقيمات التي لها أثر واحد فقط في الجملة H,V ثم ذلك الأثر .

٣٤ – عدد المستقيمات التي لها في الجملة H,V,W :

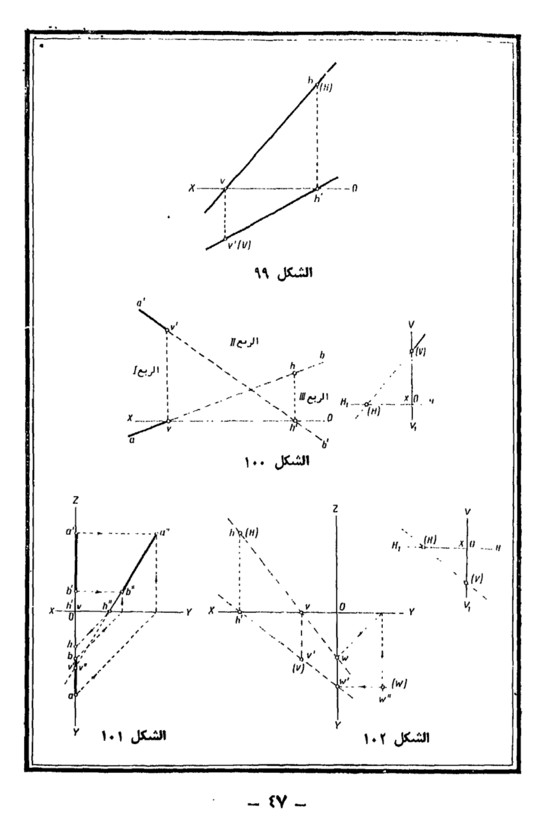
١ – أثر واحد فقط (سمّ ذلك الأثر) .

٢ – أثران (سمّ هذين الأثرين) .

٣٥ – ما هي ميزة آثار المستقيم الجنبي على المخطط ؟

٣٦ – في أي الحالات يمكن إنطباق آثار مستقيم جنبي على المخطط .

٣٧ – أعط مثالاً عندما لا يتعين المستقيم بأثريه الأفقي والشاقولي . بيّن ما هي الشروط الإضافية اللازمة لتعيين هذا المستقيم بصورة كاملة .



الشكل ٩٩

الشكل ١٠٠

الشكل ١٠١

الشكل ١٠٢

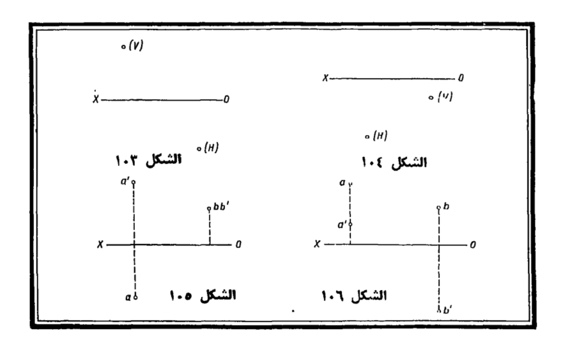
٣٨ — عدد الحالات التي ينطبق فيها أثر مستقيم مع أحد مساقطه .

٣٩ — ارسم مساقط مستقيم معطى بآثاره (الشكل ١٠٣ ، ١٠٤) .

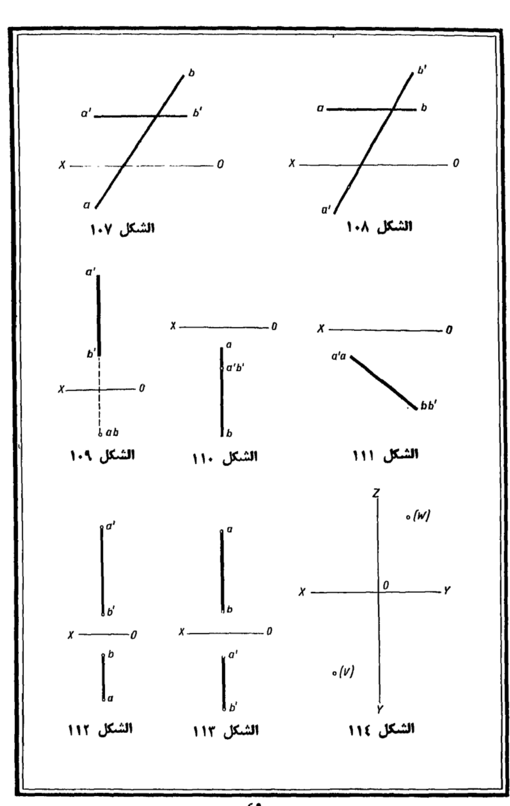
٤٠ — أوجد آثار مستقيم يمر من نقطتين A و B (الشكل ١٠٥ ، ١٠٦) .

٤١ — أوجد آثار المستقيم AB (الشكل ١٠٧ — ١١٣) .

٤٢ — إذا علمت آثار المستقيم (أو أثر ومسقط واحد لكل من الأثرين الآخرين) .
ارسم مساقطه الثلاث (الشكل ١١٤ — ١١٧) .



الشكل ١٠٣ الشكل ١٠٤ الشكل ١٠٥ الشكل ١٠٦



الشكل ١٠٨

الشكل ١٠٧

الشكل ١١١

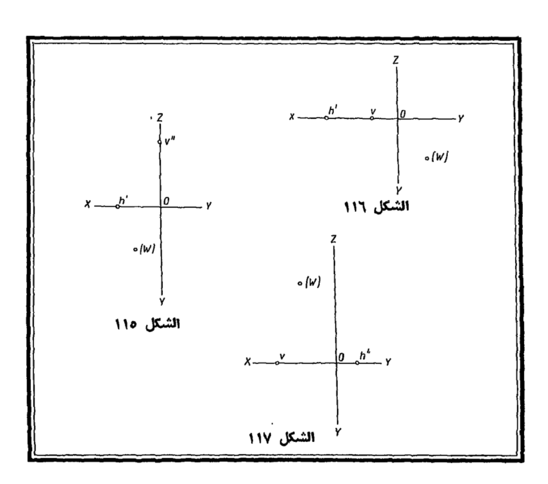
الشكل ١١٠

الشكل ١٠٩

الشكل ١١٤

الشكل ١١٣

الشكل ١١٢



الشكل ١١٦

الشكل ١١٥

الشكل ١١٧

البحث السابع

الوضعية المشتركة للمستقيمات في الفراغ

في الفراغ	على المخطط
١ ـ المستقيمات متقاطعة	المساقط المتماثلة تتقاطع ، نقاط التقاطع تقع على عمود واحـــد على خط الأرض .
٢ ـ المستقيمات متوازية	المساقط المتماثلة متوازية .

حالة خاصة : المستقيمات المتقاطعة يمكن أن تكون متعامدة فيما بينها . نظرية **إسقاط مستقيمين** متعامدين تدرس في البحث العاشر . إذا كانت المستقيمات غير متقاطعة وغير متوازية فهي مستقيمات متخالفة .

ملاحظة : الوضعية المشتركة لمستقيمين أحدهما مستقيم جنبي توضح بالمسقط الثالث .

فمثلا يكون المستقيمان الجنبيان متوازيين إذا كان مسقطاهما الجنبيان متوازيين فيما بينهما .

امثـــــــــلة

● **المثال ٢٣ :** اشرح الوضعيـــة المشتركة للمستقيمين AB و CD في الفراغ (الشكل ١١٨) .

الحل : إن نقاط تقاطع المساقط المتماثلة للمستقيمين المفروضين تقع على عمود واحد على خط الأرض . لنرمز لنقطة تقاطع المسقطين الأفقيين للمستقيمين بالحرف k ولنقطة تقاطع المسقطين الشاقوليين بالحرف k′ فالنقطة (k،k′) تقـــع على المستقيمين AB و CD أي أنها نقطة مشتركة بينهما ومنـــه المستقيمان AB و CD يتقاطعان في الفراغ .

● **المثال ٢٤ :** اشرح الوضعية المشتركة للمستقيمين AB و CD (الشكل ١١٩) .

الحل : إن نقاط تقاطع المساقط المتماثلة للمستقيمين تقع على عمود واحد على خط الأرض ، لنرمز لتقاطع المسقطين الأفقيين بالحرف k ولتقاطع المسقطين الشاقوليين بالحرف k′ فالنقطة (k′,k) تقع على المستقيم (ab,a′b′) . لتوضيح وضعية النقطة (k,k′) بالنسبة للمستقيم الجنبي CD نرسم المسقط الجنبي للمستقيم (cd,c′d′) والنقطة (k,k′) . المسقط الجنبي (k″) للنقطة لا يقع على المسقط الجنبي (c″d″) للمستقيم CD أي أن النقطة (k،k′) لا تقع على المستقيم الجنبي (cd,c′d′) وبالتالي النقطة (k,k′) ليست مشتركة بين المستقيمين AB,CD . ومنه المستقيمان CD و AB متخالفان في الفراغ .

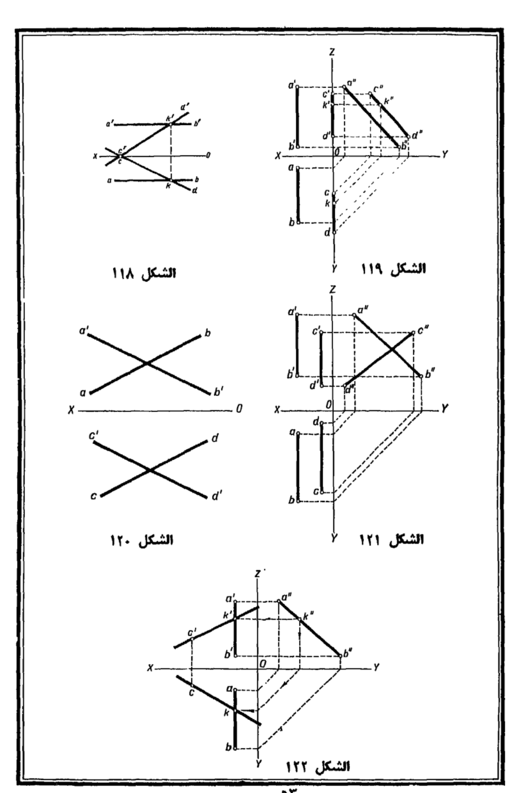
● **المثال ٢٥ :** اشرح الوضعية المشتركة للمستقيمين CD , AB (الشكل ١٢٠) .

الحل : إن المساقط الأفقية والشاقولية للمستقيمين CD،AB متوازية فيما بينها ،بناء عليه فالمستقيمان CD,AB متوازيان .

● **المثال ٢٦ :** اشرح الوضعية المشتركة للمستقيمين AB ، CD (الشكل ١٢١) .

الحل : إن المساقط الأفقية والشاقولية للمستقيمين الجنبيين المتخالفين ستكون دائماً متوازية فيما بينها. لذلك لتوضيح الوضعية المشتركة لهذه المستقيمات يجب أن نرسم مساقطها الجنبية (a″ b″) ، (c″ d″) . إن المسقطين الجنبيين للمستقيمين (ab ، a′ b′) ، (c d , c′ d′) متقاطعان فيما بينهما وعليه فالمستقيمان CD , AB متخالفان .

● **المثال ٢٧ :** لدينا مستقيم AB ونقطة C مرر من النقطة C مستقيماً ما يقطع AB (الشكل ١٢٢) .



الشكل ١١٨

الشكل ١١٩

الشكل ١٢٠

الشكل ١٢١

الشكل ١٢٢

الحل : لنأخذ نقطة ما K على المستقيم AB بما أن المستقيم المعطى AB جنبي لذا نرسم مسقطه الجنبي ونأخذ عليه المسقط الجنبي(k″)للنقطة K .

نوجد من المسقط الجنبي (k″) المسقط الأفقي والمسقط الشاقولي (k ، k′) للنقطة على المساقط الموافقة للمستقيم AB ثم نرسم مساقط المستقيم المطلوب :

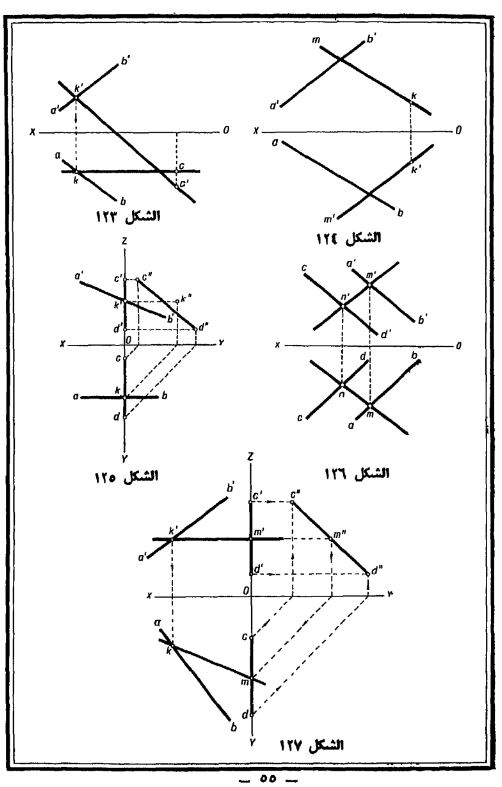
المسقط الأفقي للمستقيم عبر النقاط c , k المسقط الشاقولي للمستقيم عبر النقاط c′ , k′ .

● **المثال ٢٨ :** لدينا مستقيم AB ونقطة C مرر من النقطة C مستقيماً يقطع المستقيم AB ويوازي مستوي الإسقاط الشاقولي (الشكل ١٢٣) .

الحل : إن مساقط المستقيم المطلوب يجب أن تمر من مساقط النقطة C الموافقة وبما أن المستقيم يجب أن يوازي مستوي الإسقاط الشاقولي لذا فمسقطه الأفقي سوف يوازي خط الأرض ومنه نمرر من النقطة c المسقط الأفقي للمستقيم المطلوب بشكل يوازي خط الأرض حتى يتقاطع مع المستقيم AB في النقطة k . نوجد k′ ، ونرسم المسقط الشاقولي للمستقيم عبر النقاط c′ , k′ .

● **المثال ٢٩ :** لدينا مستقيم AB ونقطة K مرر من النقطة K مستقيماً يوازي AB (الشكل ١٢٤) .

الحل : إن مساقط المستقيم المطلوب يجب أن تمر من المساقط الموافقة للنقطة K وهكذا فالمساقط المتماثلة للمستقيمين المعطى والمطلوب يجب أن تتوازى فيما بينها ومنه نرسم مساقط المستقيم المطلوب : الأفقي (km) عبر k ويوازي المستقيم ab والشاقولي (k′ m′) عبر k′ ويوازي المستقيم a′ b′ .



الشكل ١٢٣

الشكل ١٢٤

الشكل ١٢٥

الشكل ١٢٦

الشكل ١٢٧

● **المثال ٣٠ :** لدينا مستقيم AB ونقطة K مرر من النقطة K مستقيماً يوازي AB (الشكل ١٢٥) .

الحل : المستقيم المطلوب كذلك جنبي . إن شرط توازي مستقيمين جنبيين كما هو معروف هو توازي المسقطين الجنبيين ومنه نوجد المسقط الجنبي (a″b″) للمستقيم AB والمسقط الجنبي (k″) للنقطة k ثم نرسم من النقطة k″ المسقط الجنبي للمستقيم المطلوب موازياً للمستقيم a″b″ ولنحدده بالنقطتين c″،d″ ثم نرسم المسقط الأفقي (c d) والمسقط الشاقولي (c′d′) بمساعدة المسقط الجنبي .

● **المثال ٣١ :** لدينا مستقيان متوازيان AB ، CD إقطعهما بمستقيم مـــا (الشكل ١٢٦) .

الحل : نأخذ على كل من المستقيمين AB ، CD نقطة ما ، فالمستقيم الواصل بـين هاتـــين النقطتين هو المستقيم المطلوب ، وبناء عليه نأخذ نقطة مـــا (m,m′) على AB والنقطة (n , n′) على المستقيم CD بعد ذلـك نرسم المسقط الأفقي للمستقيم المطلوب عبر النقاط n،m والمسقط الشاقولي للمستقيم عبر n′،m′ . يمكن أن نحل هذه المسألة بطريقة أخرى . لنقطع المساقط الشاقولية بمستقيم مـا ونعين نقاط التقاطع m′، n′ فبواسطة النقطة m′ نوجد m على المسقط الأفقي للمستقيم AB وبمساعدة النقطة n′ نوجد n على المسقط الأفقي للمستقيم CD نمرر من النقطتين n , m المسقط الأفقي للمستقيم المطلوب .

يمكن أن نبدأ بحل المسألة كذلـــك برسم المسقط الأفقي للمستقيم المطلوب بصورة ما ثم نتبع الخطوات السابقة .

● **المثال ٣٢ :** إقطع المستقيمين CD ، AB بمستقيم يوازي مستوي الإسقاط الأفقي (الشكل ١٢٧) .

الحل : المستقيم المطلوب يجب أن يكون موازياً لمستوي الإسقاط الأفقي بناء عليه فمسقطه الشاقولي يجب أن يوازي المحور ox ومنه نرسم مسقطاً شاقولياً ما للمستقيم المطلوب موازياً لخط الأرض . نرمز لنقطتي التقاطع مع المستقيمين a'b' ، و c'd' بـ k' و m' . من النقاط k' و m' نوجد على المستقيمين ab و cd النقطتين k،m . نمرر من k،m المسقط الأفقي (km) للمستقيم المطلوب .

مسائل

٤٣ – عين الوضعية المشتركة للمستقيمين CD، AB (الشكل ١٢٨ – ١٣٧).

٤٤ – إقطع المستقيم AB بمستقيم MN يمر من النقطة C ويوازي: مستوي الإسقاط الأفقي (الشكل ١٣٨) ،مستوي الإسقاط الشاقولي(الشكل١٣٩).

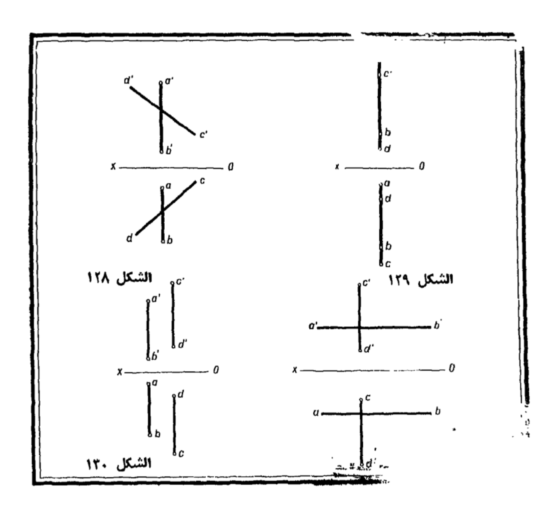
٤٥ – مرر من النقطة C مستقيماً يقطع المستقيم AB وخط الأرض (الشكل ١٤٠ و ١٤١) .

٤٦ – مرر من النقطة C مستقيماً يوازي المستقيم AB (الشكل ١٤٢ ،١٤٣).

٤٧ – إقطع المستقيمين AB و CD بمستقيم MN يوازي : مستوي الإسقاط الأفقي (الشكل ١٤٤) ، مستوي الإسقاط الشاقولي (الشكل ١٤٥) خط الأرض .

٤٨ – إقطع المستقيمين AB و CD بمستقيم EF يمر من النقطة M (الشكل ١٤٦ ، ١٤٧) .

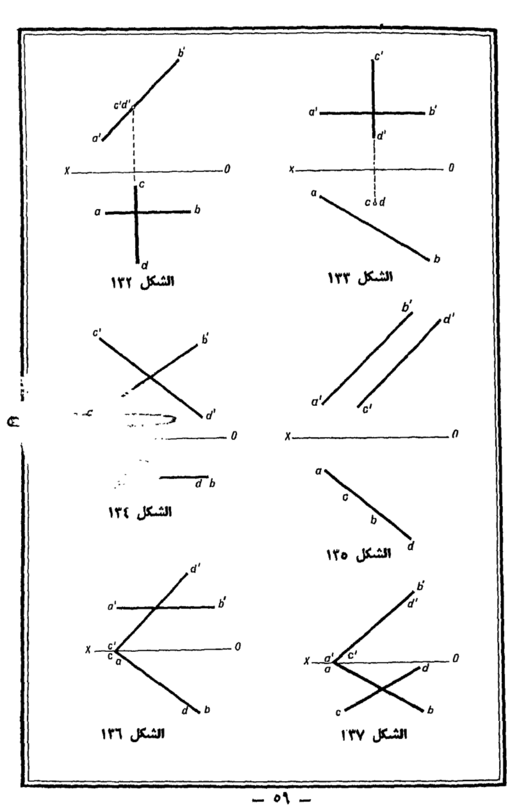
٤٩ ـــ اقطع المستقيمات EF, CD,AB بمستقيم ما MN (الشكل ١٤٨ ، ١٤٩) .



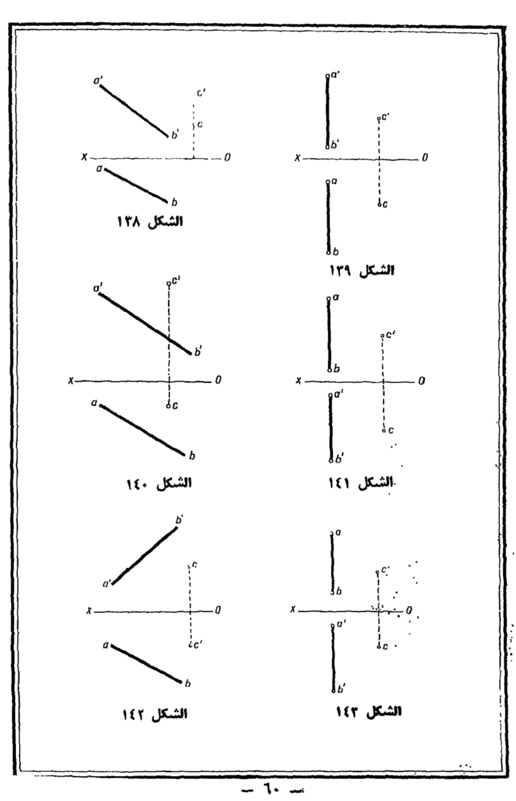
الشكل ١٢٨

الشكل ١٢٩

الشكل ١٣٠



الشكل ١٣٢
الشكل ١٣٣
الشكل ١٣٤
الشكل ١٣٥
الشكل ١٣٦
الشكل ١٣٧



الشكل ١٣٨

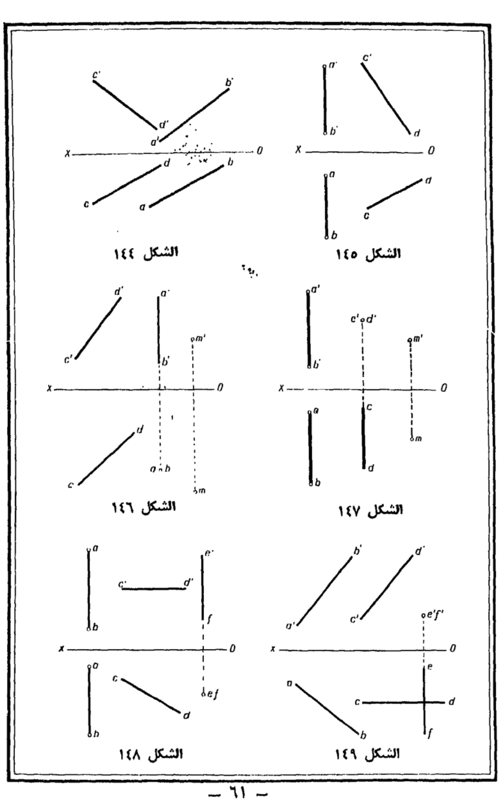
الشكل ١٣٩

الشكل ١٤٠

الشكل ١٤١

الشكل ١٤٢

الشكل ١٤٣



الشكل ١٤٤

الشكل ١٤٥

الشكل ١٤٦

الشكل ١٤٧

الشكل ١٤٨

الشكل ١٤٩

البحث الثامن

طول قطعة من مستقيم ، وزوايا ميل المستقيم على مستويات الإسقاط

تسقط قطعـة مستقيمة في الفراغ موازية لأحد مستويات الإسقاط على ذلك المستوي بقيمتها الحقيقية (أي بدون تغيير) .

فإذا كانت القطعة موازية لمستوي الإسقاط الأفقي فالزاوية بين المسقط الأفقي لهذه القطعة وخط الأرض تساوي زاوية ميل القطعة نفسها على مستوي الإسقاط الشاقولي .

يعين طول قطعة مستقيمة بمساعدة مساقطها كوتر مثلث قائم الزاوية أحد أضلاعه القائمة عبارة عن أحد مساقط القطعة المعطاة أما الضلع القائم الثاني — فهو عبارة عن القيمة المطلقة للفرق الجبري لبعد نهايتي المسقط الآخر للقطعة عن خط الأرض .

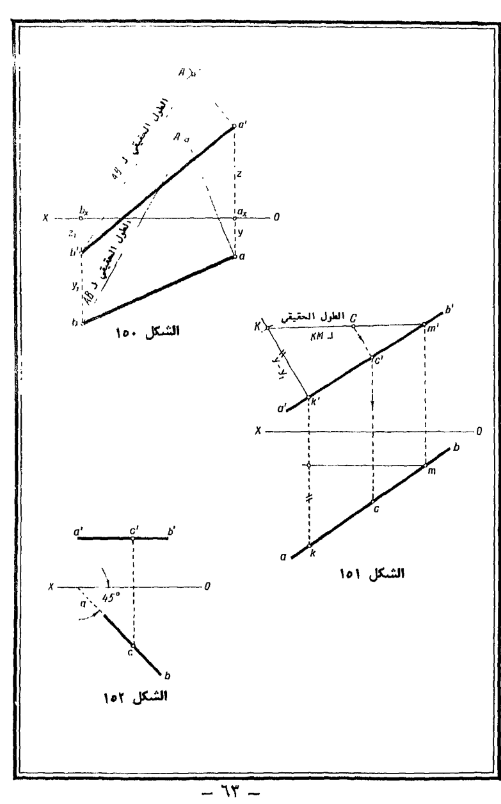
الزاوية الحاصلة بين الضلع القائم — المسقط الأفقي للقطعة — والوتر — الطول الحقيقي — تساوي إلى زاوية ميل القطعة نفسها على مستوي الإسقاط الأفقي .

الزاوية الحاصلة بين الضلع القائم — المسقط الشاقولي للقطعة — والوتر — الطول الحقيقي — تساوي إلى زاوية ميل القطعة نفسها على مستوي الإسقاط الشاقولي .

أمثـــــــلة

● **المثال ٣٣ :** عين الطول الحقيقي للقطعة AB (الشكل ١٥٠)

الحل : لنرسم مثلثاً قائم الزاوية ، ولنأخذ كأحد ضلعيه القائمين المسقط الأفقي للقطعة (ab) ، أما الضلع القائم الآخر فبطول يساوي $z + z_1$. إن وتر هـذا المثلث سيعطينا الطول الحقيقي للقطعة .



الشكل ١٥٠

الشكل ١٥١

الشكل ١٥٢

يمكننا الوصول إلى نفس النتيجة برسم مثلث قائم الزاوية ، أحد ضلعيه القائمين المسقط الشاقولي للقطعة $(a'b')$ وأما الضلع القائم الثاني فبطول $y_1 - y$. فالوتر سيعطينا الطول الحقيقي للقطعة .

● **المثال ٣٤ :** عيّن على المستقيم AB اعتباراً من النقطة K قطعة طولها 28 mm بالإتجاه من النقطة A نحو النقطة B (الشكل ١٥١) .

الحل : لنأخذ على المستقيم AB قطعة ما KM ولنعين قيمتها الحقيقية . لهذا نرسم مثلثاً قائم الزاوية ضلعيه القائمين $(k'm')$ و $|y - y_1|$. نأخذ على وتر المثلث المنشأ قطعة kc بطول 28 mm ، ثم نسقط عموداً من النقطة c على المستقيم $a'b'$ فيقطعه في النقطة c' . وهكذا بمساعدة النقطة c' نوجد النقطة c على المستقيم ab ، إن مساقط القطعة المطلوبة هي ($k'c'$ و kc) .

● **المثال ٣٥ :** مرر من النقطة C مستقيماً موازياً لمستوي الإسقاط الأفقي ويصنع مع مستوي الإسقاط الشاقولي زاوية مقدارها $45°$. (الشكل ١٥٢) .

الحل : بما أن المستقيم AB يوازي مستوي الإسقاط الأفقي ، فمسقطه الشاقولي يجب أن يوازي خط الأرض ، فلكي يصنع المستقيم مع مستوي الإسقاط الشاقولي زاوية $45°$ يجب أن يصنع مسقطه الأفقي مع خط الأرض زاوية تساوي $45°$ ، ومنه نرسم من النقطة c' المسقط الشاقولي ($a'b'$) للمستقيم بشكل يوازي خط الأرض ، ومن النقطة c نرسم المسقط الأفقي للمستقيم (ab) بشكل يصنع زاوية $45°$ مع خط الأرض ، هذه المستقيمات — اثنان ، إنما رسم على المخطط مستقيم واحد فقط .

● **المثال ٣٦ :** عين زوايا ميل المستقيم AB على مستويات الإسقاط (الشكل ١٥٣) .
الحل : لننشىء كما ذكرنا سابقاً المثلثين القائمين abB و $a'b'A$ ، فالزاوية α هي

زاوية ميل المستقيم المعطى بالنسبة لمستوي الإسقاط الأفقي والزاوية β هي زاوية ميل المستقيم نفسه بالنسبة لمستوي الإسقاط الشاقولي .

● **المثال ٣٧ :** مرر من النقطة C مستقيماً يصنع مـــع مستوي الإسقاط الأفقي زاويـة α ومـــع مستوي الإسقـاط الشاقولي زاوية β . $[\alpha + \beta < 90°]$ (الشكل ١٥٤) .

الحل : مبدئياً نرسم على انفراد مستقيماً يميل على مستويات الإسقاط بالزوايا المفروضة . لهـــذا نأخذ نقطة ما A على مستوي الإسقاط الشاقولي ونمرر من مسقطها الشـــاقولي (a') مستقيماً $a'b_1$ يصنع مع خط الأرض زاوية α . على هذا المستقيم كوتر نرسم مثلثاً قائماً ذا زاوية β في رأسه a' ، ولهـــذا نقسم المستقيم $a'b_1$ إلى نصفين ثم نرسم نصف دائرة نصف قطرها $\frac{a'b_1}{2}$. بعدذلـــك نرسم من النقطة a' ضلعاً قائماً يصنع من المستقيم $a'b_1$ زاوية β ، فيقطع القوس في نقطة k ، نصل النقطة k إلى b_1 . الضلع القائم ka' يساوي بقيمته المسقط الشاقولي للمستقيم المساعد . لكي نعيد وضعيته نرسم من النقطة a' قوساً من دائرة نصف قطرها $a'k$ فيقطع خط الأرض في النقطة b' ، وعليه $a'b'$ — المسقط الشـاقولي للمستقيم المساعد .

إن الضلـــع $k\,b_1$ يعين فرق بعدي نهايتي المسقط الأفقي للمستقيم عـــن خط الأرض . لكي نرسم المسقط الأفقي المستقيم ، نرفـع من النقطـــة b' عموداً على خط الأرض ونعين عليه قطعة $b'b$ تساوي القطعة kb_1 . بوصل النقطتين b,a نحصل على المسقط الأفقي (ab) للمستقيم المساعد . الآن يبقى أن نمرر من المسقطين (c,c') للنقطة C المسقطين ($mn,m'n'$) للمستقيم المطلوب بحيث يوازيا مسقطي المستقيم المنشأ سابقاً ($ab,a'b'$) .

ملاحظة : يمكن أخذ النقطة A على مستوي الإسقاط الأفقي . على الطالب دراسـة هذه الحالة بنفسه .

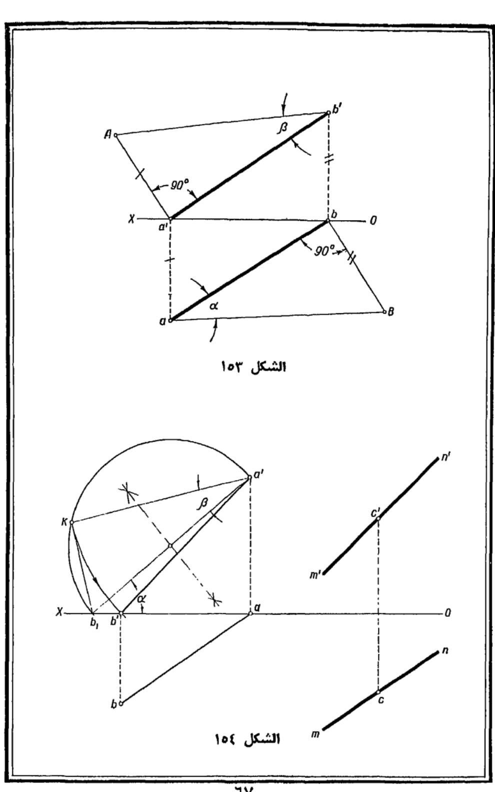
● **المثال ٣٨ :** لدينا مستقيم CB ونقطة A . مرر من النقطة A مستقيماً يقطع المستقيم BC بزاوية معطاة φ (الشكل ١٥٥) .

الحل : نضم المستقيم (bc ، b′c′) والنقطة (a ، a′) في مثلث (a b c , a′ b′ c′) ونعين أبعاده الحقيقية . ننشىء لهذا مثلثاً مساعداً A BC ونمرر من النقطة A المستقيمين AM و AN اللذين يصنعان مع المستقيم BC الزاوية φ ، بعد ذلك نعين على المستقيم bC واعتباراً من النقطة b القطعتين b M و b N المساويتين للقطعتين BM و B N ، ثم نسقط أعمدة من النقاط M و N على المستقيم bc فنحصل على النقطتين n , m . ومن ثم نوجد n′, m′ . المستقيمان (am , a′m′) و (an , a′n′) هما المستقيمان المطلوبان .

● **المثال ٣٩ :** لدينا مستقيم BC ونقطة A . عين على BC نقطة تبعد عن النقطة A بمقدار مفروض l mm (الشكل ١٥٦) .

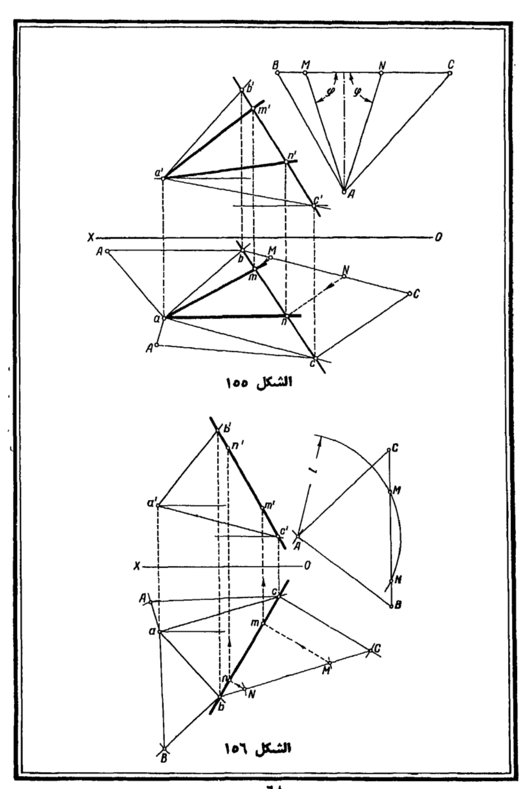
الحل : نضم المستقيم (bc , b′c′) والنقطة (a , a′) في مثلث (a′ b′ c′ , abc) ونعين أبعاده الحقيقيه . ننشىء مثلثاً مساعداً ABC ثم نوسم من النقطة A قوساً بنصف قطر l mm ، فيقطع الضلع BC في النقطتين N,M نأخذ على المستقيم bC اعتباراً من النقطة b قطعتين bM و bN مساويتين للقطعتين BM و BN ، ثم نسقط أعمدة من النقطتين M و N على المستقيم bc فنحصل على النقطتين m و n ، وبمساعدتها نوجد النقطتين m′ و n′ . النقطتان (m,m′) و (n,n′) هما النقطتان المطلوبتان

حالة خاصة : يمكن الحصول على نقطة واحدة (متى ؟) ويمكن أن لا نحصل على أي نقطة (متى ؟) .



الشكل ١٥٣

الشكل ١٥٤



الشكل ١٥٥

الشكل ١٥٦

● **المثال ٤٠ :** لدينا مثلث ABC . ارسم منصف الزاوية A (الشكل ١٥٧) .

الحل : لنوجد القيمة الحقيقية للمثلث (abc,a'b'c') . ننشىء مثلثاً مساعداً ABC ونرسم منصف الزاوية A الذي يقطع الضلع BC في النقطة M . نأخذ على المستقيم b'C واعتباراً من النقطة b' قطعة b'M مساوية لـ BM ، ثم نسقط من النقطة M عموداً على المستقيم b' c' فنحصل على النقطة m' ، ومنها نعين النقطة m . المستقيم (am ، a'm') هو المستقيم المطلوب .

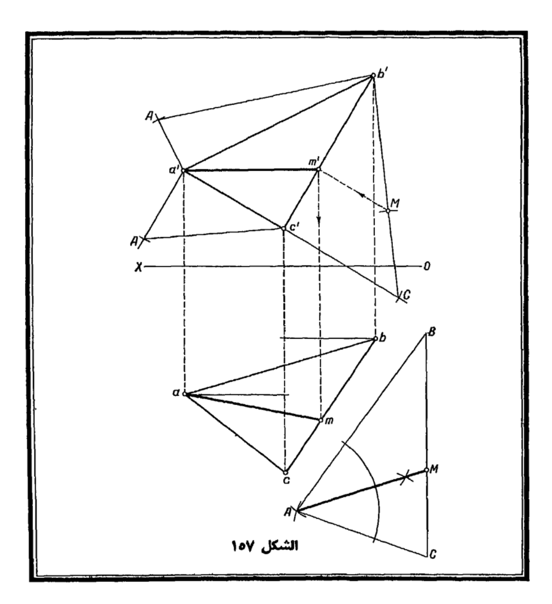
● **المثال ٤١ :** لدينا مستقيم AB يقطع خط الأرض . ارسم منصف الزاوية الحاصلة بين المستقيم AB وخط الأرض (الشكل ١٥٨) .

الحل : لنأخذ نقطة ما (c,c') على خط الأرض ولنصلها بالنقطة (b,b') فنحصل على المثلث (a b c , a'b'c') . نعين القيمة الحقيقية لهذا المثلث ، ماتبقى يتضح من المخطط (انظر المثال ٤٠) .

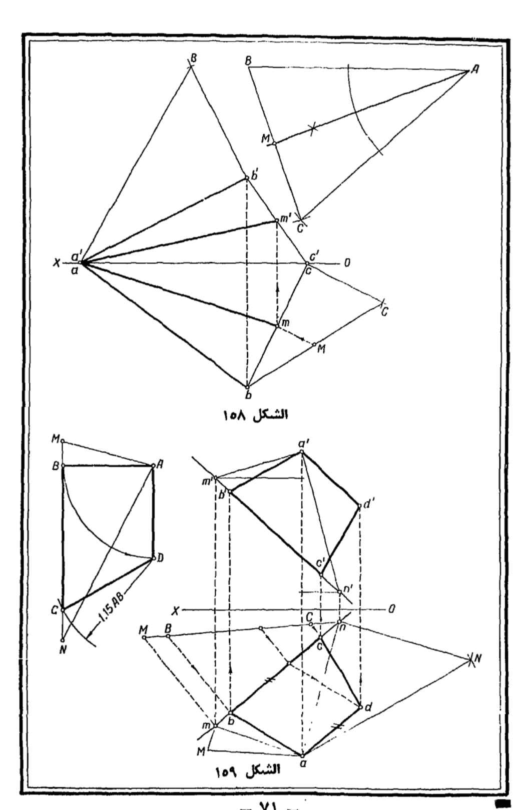
● **المثال ٤٢ :** لدينا نقطة A ومستقيم MN . أنشىء شبه منحرف قائم ABCD إذا علم أن القاعدة الكبرى BC تقع على المستقيم MN ، وأن القاعدة الصغرى AD تساوي AB ، أما الضلع الجانبي DC فيساوي 1,15 AB (الشكل ١٥٩) .

الحل : لتعيين الرؤوس B ، C,D لشبه منحرف نستعمل مثلث مساعد ، لهذا نضم المستقيم (mn،m'n') والنقطة (a, a') في مثلث (amn,a'm'n') ، ونعين قيمته الحقيقية . ننشىء على انفراد المثلث AMN . الذروة B هي مسقط العمود النازل من النقطة A على الضلع MN . نمرر من النقطة A مستقيماً يوازي

الضلع MN ، ونأخذ عليه قطعة بطول AB فنحصل على الرأس D . لتعيين الرأس C نرسم من النقطة D قوساً بنصف قطر يساوي 1,15 AB فيقطع المستقيم MN في النقطة C . والآن يبقى أن ننجز ذلك بالتسلسل على المخطط . الإنشاء مبين على الشكل .



الشكل ١٥٧



الشكل ١٥٨

الشكل ١٥٩

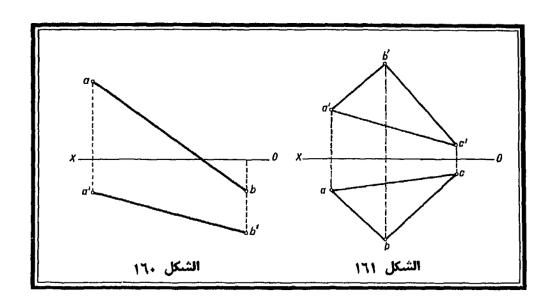
مسائل

٥٠ – عين الطول الحقيقي لقطعة مستقيمة AB وزوايا ميلها على المستويات V,H (الشكل ١٦٠) .

٥١ – ماهو المعنى الهندسي لتوازي مسقطي مستقيم ذي وضعية عامة على المخطط ؟

٥٢ – مرر من نفس النقطة (35 و 20) A مستقيماً يميل على المستويين V,H بنفس الميل (المسألة غير معينة) .

٥٣ – أنشىء القيمة الحقيقية للمثلث ABC (الشكل ١٦١) .



الشكل ١٦٠ الشكل ١٦١

٥٤ – مرر من النقطة (35 و 20) A مستقيماً يوازي مستوي الإسقاط الشاقولي ويصنع مع مستوي الإسقاط الأفقي زاوية قدرها 45° . ماهو عدد هذه المستقيمات ؟

٥٥ – مرر من النقطة (30 و 20) A مستقيماً يصنع مـــع مستوي الإسقاط الأفقي زاوية 30° ومع مستوي الإسقاط الشاقولي زاوية 45° . ماهو عدد هذه المستقيمات ؟

٥٦ – خذ على المستقيم AB قطعة بطول 15mm وذلك إعتباراً من النقطة A وباتجاه النقطة B (الشكل ١٦٢) .

٥٧ – أوجد مركز الدائرة المارة من رؤوس المثلث ABC (الشكل ١٦٣) .

٥٨ – أوجد مركز الدائرة المرسومة داخل المثلث ABC (الشكل ١٦٣) .

٥٩ – ارسم منصف الزاوية ABC (الشكل ١٦٤ ، ١٦٥) .

٦٠ – أسقط من النقطة A عموداً على المستقيم BC (الشكل ١٦٦) .

٦١ – عيّن بعد النقطة A عن المستقيم BC (الشكل ١٦٦) .

٦٢ – عيّن البعد بين المستقيمين المتوازيين AB و CD (الشكل ١٦٧) .

٦٣ – ارسم كرة مركزها في النقطة C وتمس المستقيم AB (الشكل ١٦٨) .

٦٤ – أوجد نقطة على المستقيم AB تبعد عن النقطة C بمقدار 30 mm (الشكل ١٦٨) . ما هي الحالات الممكنة ؟

٦٥ – أوجد نقطة تقاطع المستقيم MN مع سطح كرة (الشكل ١٦٩) . ما هي الحالات الممكنة ؟

٦٦ ــ ارسم من النقطة C كرة تقتطع من مستقيم معلوم AB قطعة بطول 40 mm (الشكل ١٦٨) .

٦٧ ــ أنشيء مثلثاً ABC قائماً في النقطة C الواقعة على المستقيم MN (الشكل ١٧٠) . ماهي الحالات الممكنة ؟

٦٨ ــ مرر من النقطة C مستقيماً يقطع المستقيم AB بزاوية حادة φ تساوي 30° أو 40° أو 60° (الشكل ١٦٨) . كم يبلغ عدد هذه المستقيمات ؟

٦٩ ــ ارسم مثلثاً متساوي الساقين ABC قاعدته BC واقعة على المستقيم MN إذا كان طول الساق 1,25 من الإرتفاع (الشكل ١٧١) .

٧٠ ــ ارسم مثلثاً متساوي الساقين ABC قاعدته BC واقعة على المستقيم MN إذا كان طول القاعدة أكبر بمرة ونصف من الإرتفاع (الشكل ١٧١) .

٧١ ــ ارسم مثلثاً متساوي الساقين ABC ، قاعدته BC واقعة على المستقيم MN إذا كانت زاوية القاعدة تساوي 30° (الشكل ١٧١) .

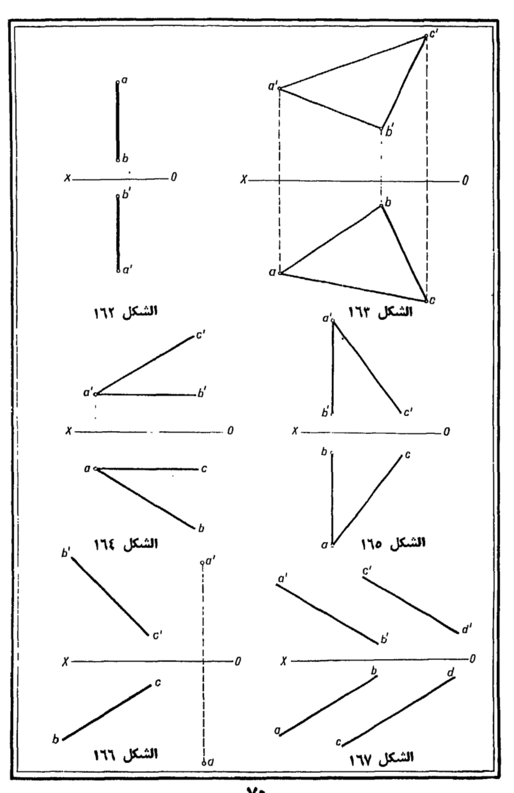
٧٢ ــ ارسم مثلثاً متساوي الأضلاع ABC ، قاعدته BC واقعة على المستقيم MN (الشكل ١٧١) .

٧٣ ــ ارسم مثلثاً قائم الزاوية ABC ، ضلعه القائم BC واقع على المستقيم MN إذا كان طول الوتر يساوي 1,25h (الشكل ١٧٢) .

٧٤ ــ ارسم مثلثاً قائم الزاوية ABC ، ضلعه القائم BC واقع على المستقيم MN إذا كانت الزاوية الحادة C تساوي 30° (الشكل ١٧٢) .

٧٥ ــ ارسم مثلثاً قائماً متساوي الساقين ABC بحيث يقع وتره BC على المستقيم MN (الشكل ١٧١) .

٧٦ ــ ارسم مثلثاً قائماً متساوي الساقين ABC بحيث يقع ضلعه القائم BC على



الشكل ١٦٢

الشكل ١٦٣

الشكل ١٦٤

الشكل ١٦٥

الشكل ١٦٦

الشكل ١٦٧

المستقيم MN (الشكل ١٧٢) .

٧٧ – ارسم مستطيلاً ABCD ضلعه الكبير BC واقع على المستقيم MN إذا كانت مساحته تساوي $1{,}5\ AB^2$ (الشكل ١٧٢) .

٧٨ – ارسم مستطيلاً ABCD ضلعه الكبير BC واقع على المستقيم MN إذا كانت نسبة ضلعيه تساوي 1,5 (الشكل ١٧٢) .

٧٩ – ارسم مربعاً ABCD بحيث يقع ضلعه BC على المستقيم MN (الشكل١٧٢) .

٨٠ – ارسم مربعاً ABCD بحيث يقع قطره BD على المستقيم MN (الشكل ١٧١).

٨١ – ارسم معينا ABCD بحيث يقع ضلعه BC على المستقيم MN إذا كان طول ضلعه يساوي 1,2 من إرتفاعه (الشكل ١٧١) .

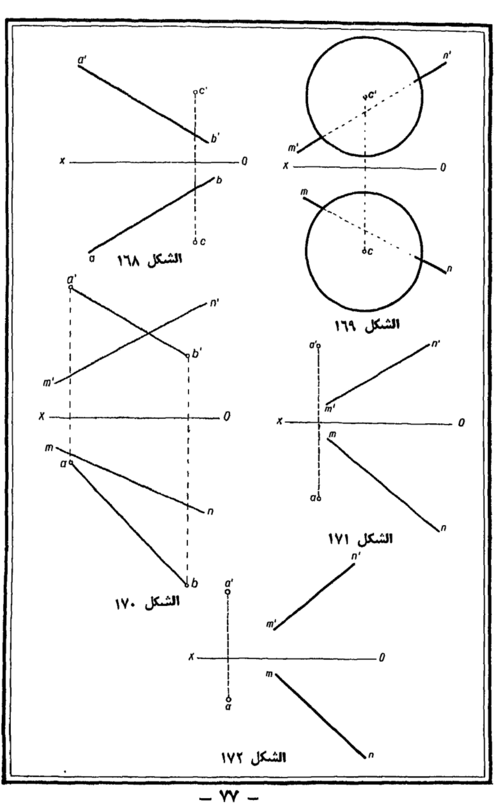
٨٢ – ارسم معيناً ABCD بحيث يقع ضلعه BC على المستقيم MN ، إذا كانت الزاوية الحادة B تساوي $60°$ (الشكل ١٧١) .

٨٣ – ارسم معيناً ABCD بحيث يقع قطره الكبير BD على المستقيم MN إذا كانت نسبة قطريه تساوي 2 (الشكل ١٧١) .

٨٤ – ارسم متوازي أضلاع ABCD ، بحيث تقع قاعدته BC على المستقيم MN إذا كانت الزاوية الحادة B تساوي $60°$ وكان طول القطر AC أكبر من الضلع الجانبي بمقدار 5 mm (الشكل ١٧١) .

٨٥ – ارسم متوازي أضلاع ABCD بحيث تقع قاعدته BC على المستقيم MN ، على أن يكون طول ضلعه الجانبي مساو لـ 1,25 h ، أما نسبة ضلعيه فتساوي 2 (الشكل ١٧١) .

٨٦ – ارسم شبه منحرف قائم ABCD بحيث تقع قاعدته الكبرى BC على المستقيم



الشكل ١٦٨

الشكل ١٦٩

الشكل ١٧٠

الشكل ١٧١

الشكل ١٧٢

MN بشرط أن يكون AD=AB وأن يكون DC = 1.15 AB (الشكل ١٧٢) .

٨٧ – ارسم شبه منحرف قائم ABCD بحيث تقع قاعدته الكبرى BC على المستقيم MN بشرط أن يكون $AD = AB = \frac{2}{3} BC$ (الشكل ١٧٢) .

٨٨ – ارسم شبه منحرف قائم ABCD بحيث تقع قاعدته الكبرى BC على المستقيم MN شريطة أن يكون AD=AB ، وأن تكون الزاوية $C=45^\circ$ (الشكل ١٧٢) .

٨٩ – ارسم شبه منحرف متساوي الساقين ABCD بحيث تقع قاعدته الكبرى BC على المستقيم MN ، بشرط أن يكون AB=AD=DC=40mm (الشكل ١٧١).

٩٠ – ارسم شبه منحرف متساوي الساقين ABCD بحيث تقع قاعدته الكبرى BC على المستقيم MN بشرط أن تكون الزاوية الحادة B=C وتساوي 45° أما القاعدة الصغرى فتساوي الضلع الجانبي (الشكل ١٧١) .

البحث التاسع

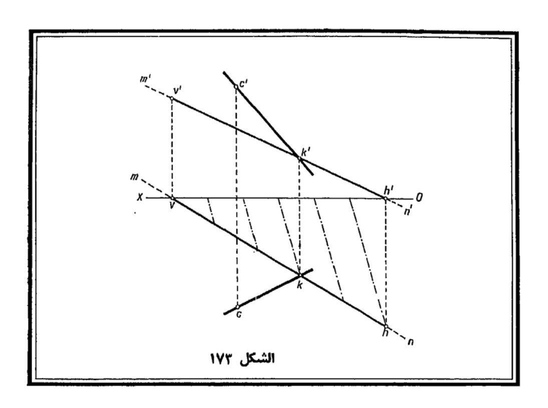
تقسيم قطعة بنسبة معينة

إذا قسمت نقطة قطعة مستقيمة في الفراغ بنسبة $\frac{m}{n}$ فإن مساقط النقطة ستقسم المساقط المماثلة للقطعة بنفس النسبة .

بناء عليه لتقسيم قطعة (على المخطط) بنسبة معينة لالزوم لتعيين طولها الحقيقي .

امثـــــلة

● **المثال ٤٣ :** لدينا مستقيم MN ونقطة C . مرر من النقطة C مستقيماً يقطع المستقيم المفروض في نقطة تقسم القطعة الواقعة بين الأثرين بنسبة $\frac{2}{3}$ بالإتجـــاه من H إلى V (الشكل ١٧٣) .



الشكل ١٧٣

الحل : حسب القاعدة المعروفة نوجد أثري المستقيم (m'n' ، mn) ونقسم أحد مسقطيه مثلاً الأفقي بالنسبة المفروضة $\frac{2}{3}$ بالنقطة k . بمساعدة النقطة k نوجد المسقط الشاقولي (k') للنقطة على المسقط الشاقولي (m' n') للمستقيم MN . بعد ذلك نرسم مسقطي المستقيم المطلوب بوصل المساقط المتماثلة النقطتين K و C أي نرسم المسقط الأفقي للمستقيم من النقطة k و c والمسقط الشاقولي للمستقيم من النقطة k' و c' .

مسائل

٩١ – أوجد النقطة C التي تقسم القطعة AB بنسبة $\frac{1}{2} = \frac{m}{n}$ (الشكل ١٧٤)، $\frac{2}{3} = \frac{m}{n}$ (الشكل ١٧٥) .

٩٢ – مرر من النقطة C مستقيماً يقطع القطعة AB في نقطة تقسمها بنسبة $\frac{1}{3} = \frac{m}{n}$ (الشكل ١٧٦) .

٩٣ – أوجد مركز ثقل سطح المثلث ABC (الشكل ١٦٣)

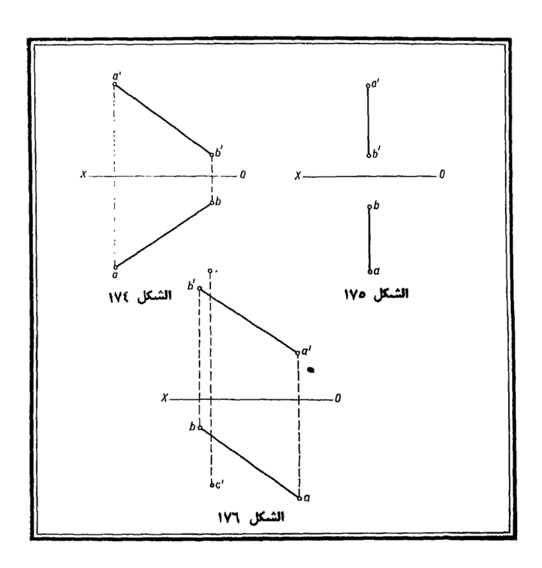
٩٤ – أوجد مركز ثقل محيط المثلث ABC (الشكل ١٦٣) .

البحث العاشر

بعض حالات اسقاط الزوايا

إن أي زاوية يتوازى ضلعاها مع أحد مستويات الإسقاط تسقط على ذلك المستوي دون انحراف أو تغيير .

• الزاوية القائمة التي يوازي أحـــد ضلعيها على الأقل أحد مستويات الإسقاط تسقط على ذلك المستوي بشكل زاوية قائمة أيضـاً . (أي دون تغيير) . وهكذا نرى أنه إذا أعطي في الفراغ مستقيمان متقاطعان متعامدان وكان أحدهما يوازي مستوي الإسقاط ، فـإن مسقطها على مستوي الإسقـاط هـــذا سيكون بشكل مستقيمين متعامدين « انظر البحث السابع حول تعامد مستقيمين » .



الشكل ١٧٤

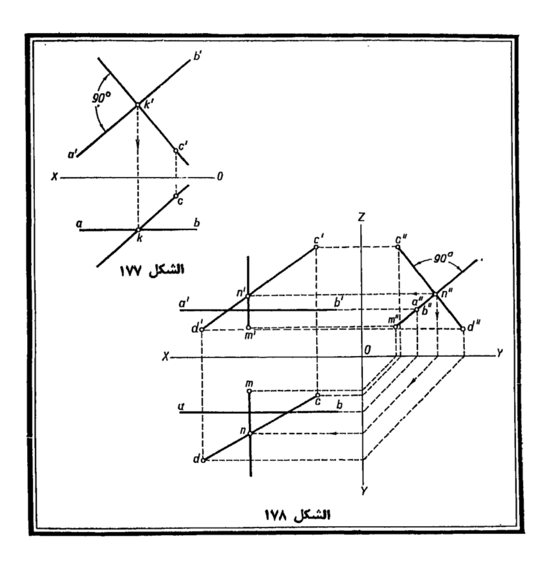
الشكل ١٧٥

الشكل ١٧٦

امثـــــــلة

● **المثال ٤٤ :** لدينا مستقيم AB ونقطة C ، مرور من النقطة C مستقيماً يقطع المستقيم AB بزاوية قائمة (الشكل ١٧٧) .

الحل : إن المستقيم المطلوب يجب أن يحقق في الفراغ الشروط الثلاث : أن يمر



الشكل ١٧٧

الشكل ١٧٨

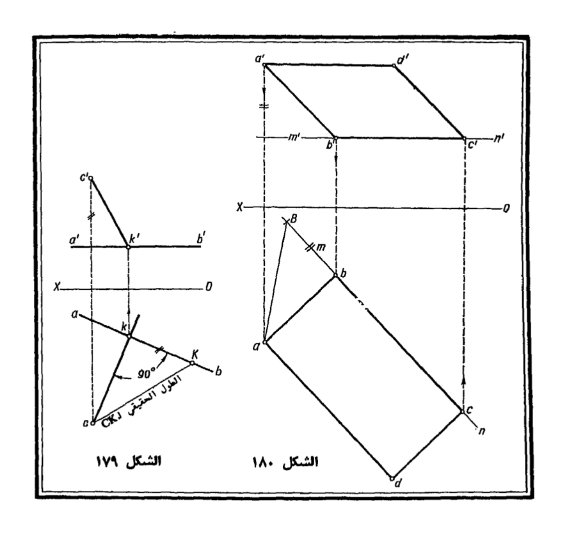
من النقطة C ، وأن يتعامد مع المستقيم AB وأن يوازي مستوي الإسقاط الشاقولي وأن يقطع المستقيم AB . على المخطط مساقط المستقيم المطلوب يجب أن تمر من المساقط الموافقة للنقطة C . المساقط الشاقوليـة للمستقيمين المعطى والمطلوب يجب أن تتعامد ، وأخيراً نقـاط تقاطع المساقط المتماثـلة يجب أن تقع على عمود واحد على خط الأرض . بناء عليه نمرر من النقطـة 'c المسقط الشاقولي للمستقيم المطلوب بصورة عمودية على المستقيم 'a'b فيقطعه في 'k . من النقطـة 'k نوجد النقطة k على المسقط الأفقي (ab) للمستقيم AB ومنها نرسم المسقط الأفقي (ck) للمستقيم المطلوب .

● **المثال ٤٥** : إقطع المستقيمين AB و CD بثالث عمودي عليهما (الشكل ١٧٨) .

الحل : إن المستقيم المطلوب MN هو مستقيم جنبي وذلك لأنه يجب أن يكون عمودياً على المستقيم AB الذي يوازي خط الأرض . فلكي يتعامـد المستقيم المطلوب MN مـع المستقيم CD أيضاً يجب أن تكون مساقطهما الجنبية ("c"d) و ("m"n) متعامدة فيما بينهما « نظرية إسقاط الزاوية القائمة » . وهكذا نرسم من "a"b خطاً مستقيماً "m"n عمودياً على "c"d فيتقاطعا في النقطة "n . بعد ذلك نوجد n و 'n على المسقطين الموافقين للمستقيم CD ثم نرسم المستقيم ('mn , m'n) .

● **المثال ٤٦** : لدينا مستقيم AB ونقطة C . عين بعـد النقطة C عن المستقيم AB (الشكل ١٧٩) .

الحل : ننزل من النقطة ('c,c) عموداً على المستقيم ('ab،a'b) ونعين نقطة تقاطعه ('k,k) . لهذا نرسم من النقطة c عموداً على المستقيم ab فنحصل عنـد تقاطعها على النقطة k ، منها نوجد النقطة 'k وبعد ذلك نعين الطول الحقيقي للقطعة ('ck , c'k) .



الشكل ١٧٩

الشكل ١٨٠

● **المثال ٤٧** : لدينا المستقيم MN الموازي لمستوي الإسقاط الأفقي ، والمسقط الشاقولي للمستقيم AB المتعامد معه . إرسم مستطيلاً ABCD قاعدته BC واقعة على المستقيم MN على أن يكون طولها 1,5 AB (الشكل ١٨٠) .

الحل : لنعين النقطة b ولنمرر منها مستقيماً عمودياً على المستقيم mn فيتعين المسقط الأفقي (ab) للضلع الجانبي . نوجـــد القيمة الحقيقية aB للضلـــع (ab,a'b') ثم نأخذ على المستقيم (mn,m'n') إعتباراً من النقطة (b,b') قطعة بطول 1,5 aB فنحصل على النقطة (c,c') . من هذه النقطة ومن النقطة (a,a') نمرر مستقيمين موازيين للضلعين الآخرين (ab , a'b') و (bc , b'c') .

مسائل

٩٥ – مرر من النقطة C مستقيماً يقطع المستقيم AB ويتعامد معه (الشكل ١٨١ – ١٨٥) .

٩٦ – إقطع المستقيمين AB و CD بمستقيم عمودي عليهما (الشكل ١٨٦ و ١٨٧).

٩٧ – أنزل من النقطة C عموداً على المستقيم AB (الشكل ١٨٨ و ١٨٩) .

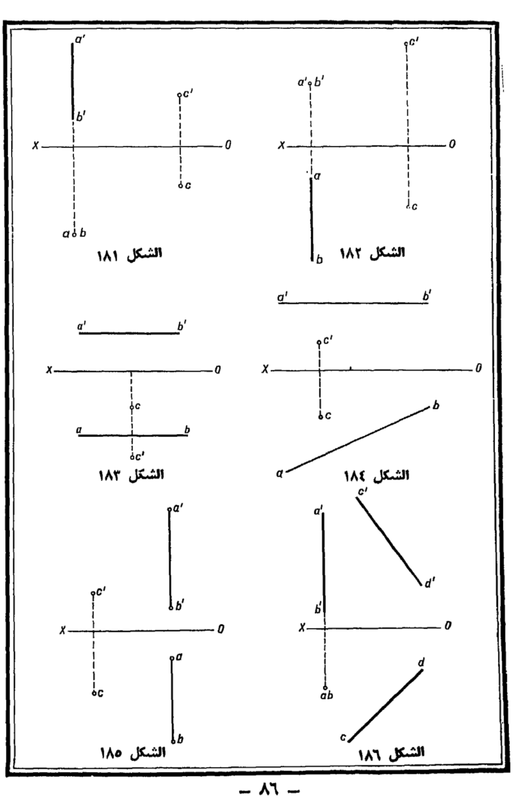
٩٨ – عيّن بعد النقطة C عن المستقيم AB (الشكل ١٨٨ و ١٨٩) .

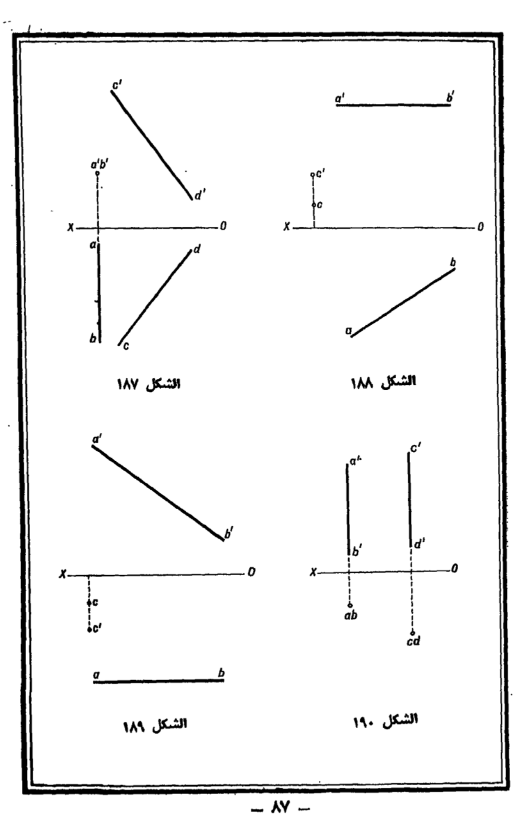
٩٩ – عيّن البعد بين المستقيمين المتوازيين AB و CD (الشكل ١٩٠ – ١٩٤).

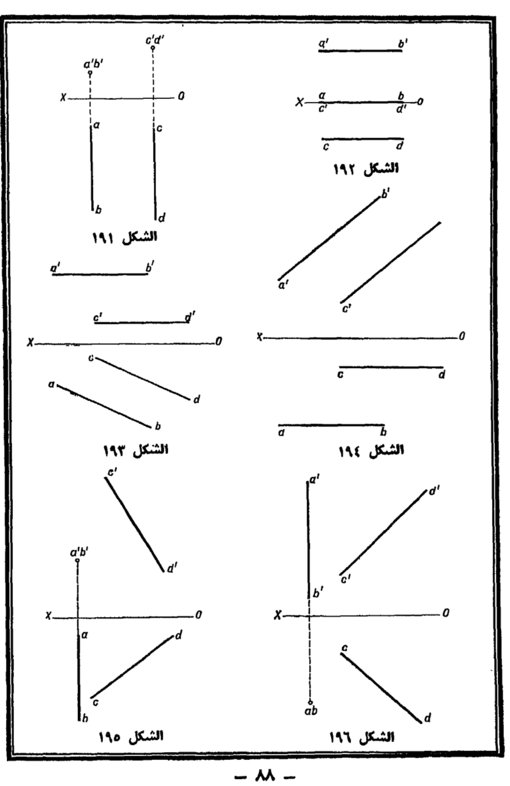
١٠٠ – عيّن البعد بين المستقيمين المتخالفين AB و CD (الشكل ١٩٥ و ١٩٦) .

١٠١ – أوجد المسقط الناقص للنقطة C إذا علمت أن البعد l بين النقطة C والمستقيم AB يساوي 30 mm (الشكل ١٩٧ – ٢٠١) . ما هي الحالات الممكنة ؟ .

١٠٢ – أوجد المسقط الناقص للمستقيم CD الذي يوازي المستقيم AB إذا علمت أن المسافة بينهما $l = 20$ mm (الشكل ٢٠٢ – ٢٠٦) . ما هي الحالات الممكنة ؟

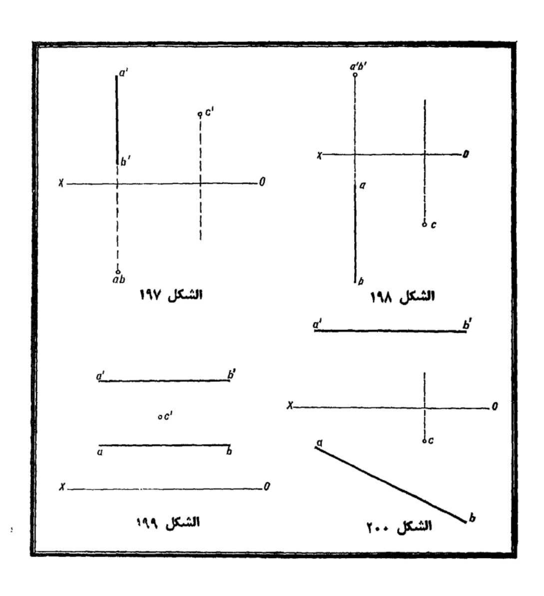

a'
b'
c'
X
0
c
a b
الشكل ١٨١
c'
a' b'
X
0
a
c
b
الشكل ١٨٢
a' b'
X
0
c
a b
c'
الشكل ١٨٣
a' b'
c'
X
0
c
b
a
الشكل ١٨٤
a'
b'
c'
X
0
a
c
b
الشكل ١٨٥
c'
a'
d'
b'
X
0
d
ab
c
الشكل ١٨٦


c'
a'b'
d'
X
O
a
d
b
c
الشكل ١٨٧
a'
b'
c'
c
X
O
b
a
الشكل ١٨٨
a'
b'
X
O
c
c'
a
b
الشكل ١٨٩
a'
c'
b'
d'
X
O
ab
cd
الشكل ١٩٠


c'd'
a'b'
X
O
a
c
b
d
الشكل ١٩١
a'
b'
X
a
b
O
c'
d'
c
d
الشكل ١٩٢
b'
a'
c'
X
O
c
d
a
b
الشكل ١٩٤
a'
b'
c'
d'
X
O
c
a
d
b
الشكل ١٩٣
c'
a'b'
d'
X
O
a
d
c
b
الشكل ١٩٥
a'
d'
c'
b'
X
O
c
ab
d
الشكل ١٩٦

١٠٣ – ارسم كرة مركزها في النقطة C وتمس المستقيم AB (الشكل ٢٠٧ و ٢٠٨).

١٠٤ – عين على المستقيم AB نقطة تبعد عن النقطة C بمقدار 40mm (الشكل ٢٠٩). ما هي الحالات الممكنة ؟

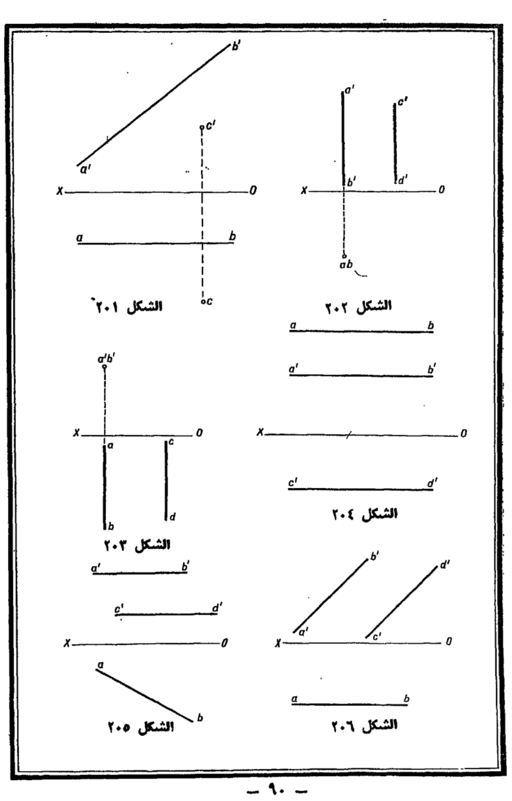


الشكل ١٩٧

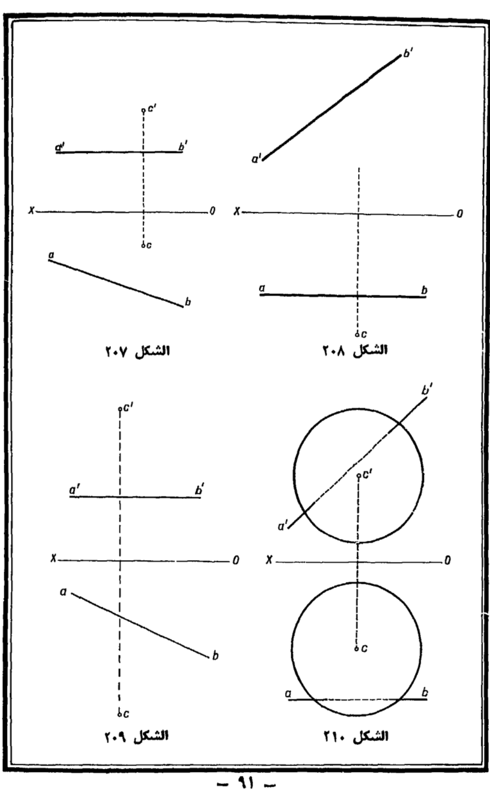
الشكل ١٩٨

الشكل ١٩٩

الشكل ٢٠٠



b'
c'
a'
X
O
a
b
c
الشكل ٢٠١
a'
c'
b'
d'
X
O
ab
الشكل ٢٠٢
a
b
a'
b'
a'b'
X
O
a
c
b
d
الشكل ٢٠٣
X
O
c'
d'
الشكل ٢٠٤
a'
b'
c'
d'
X
O
a
b
الشكل ٢٠٥
b'
d'
a'
c'
X
O
a
b
الشكل ٢٠٦


c'
a'
b'
X
0
c
a
b
الشكل ٢٠٧
b'
a'
X
0
a
b
c
الشكل ٢٠٨
c'
a'
b'
X
0
a
b
c
الشكل ٢٠٩
b'
c'
a'
X
0
c
a
b
الشكل ٢١٠

١٠٥ – أوجد نقطة تقاطع المستقيم AB مع سطح كرة (الشكل ٢١٠).
ما هي الحالات الممكنة ؟

١٠٦ – ارسم من النقطة C كرة تحدد على مستقيم معلوم AB قطعة طولها $l = 40$ mm (الشكل ٢١١) .

١٠٧ – ارسم مثلثاً ABC قائماً في B الواقعة على المستقيم EF (الشكل ٢١٢) . ما هي الحالات الممكنة ؟

١٠٨ – مرر من النقطة C مستقيماً يقطع المستقيم MN وفق زاوية حادة φ تساوي $30°$ أو $45°$ أو $60°$ (الشكل ٢١٣) . ما هو عدد هذه المستقيمات ؟

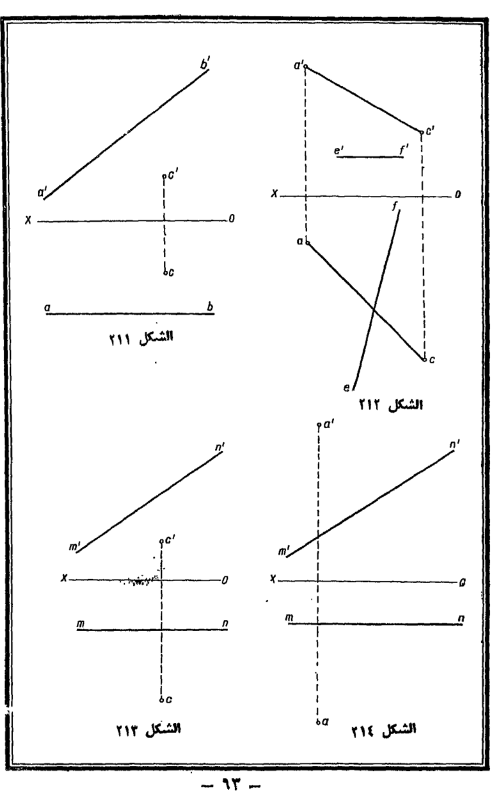
١٠٩ – ارسم مثلثاً متساوي الساقين ABC قاعدته BC واقعة على المستقيم MN إذا كان طول الساق 1,25 h (الشكل ٢١٤) .

١١٠ – ارسم مثلثاً متساوي الساقين ABC ، قاعدته BC واقعة على المستقيم MN على أن يكون طولها 1,5 h (الشكل ٢١٥) .

١١١ – ارسم مثلثاً متساوي الساقين ABC ، قاعدته BC واقعة على المستقيم MN على أن تكون زاوية قاعدته مساوية $30°$ (الشكل ٢١٤) .

١١٢ – ارسم مثلثاً متساوي الساقين ABC ، قاعدته BC واقعة على المستقيم MN ، على أن يكون ساقه أكبر من إرتفاعه بمقدار 10 mm (الشكل ٢١٤) .

١١٣ – ارسم مثلثاً متساوي الساقين ABC ، قاعدته BC واقعة على المستقيم MN ، ورأسه A واقع على المستقيم EF بحيث تكون النقطة K أساساً لارتفاعه AK ، وأن يكون الساق مساوياً 1,15 AK (الشكل ٢١٦) .


b'
a'
c'
X
0
c
a
b
الشكل ٢١١
a'
c'
e'
f'
X
0
f
a
c
e
الشكل ٢١٢
n'
m'
c'
X
0
m
n
c
الشكل ٢١٣
a'
n'
m'
X
0
m
n
a
الشكل ٢١٤

١١٤ – ارسم مثلثاً متساوي الساقين ABC على أن تكون قاعدته BC (60 mm) واقعة على المستقيم MN ، ورأسه A واقعاً على المستقيم EF العمودي على MN بحيث يكون ارتفاع المثلث مساوياً 40 mm. (الشكل ٢١٧).

١١٥ – ارسم مثلثاً متساوي الساقين ABC ، قاعدته BC واقعة على المستقيم MN شريطة أن يكون ارتفاعه AD مساوياً 40 mm ويقع على المستقيم EF ، وأن تكون زاوية قاعدته مساوية 30° ، (الشكل ٢١٧).

١١٦ – ارسم مثلثاً متساوي الساقين ABC ، رأسه A واقع على المستقيم EF (الشكل ٢١٨).

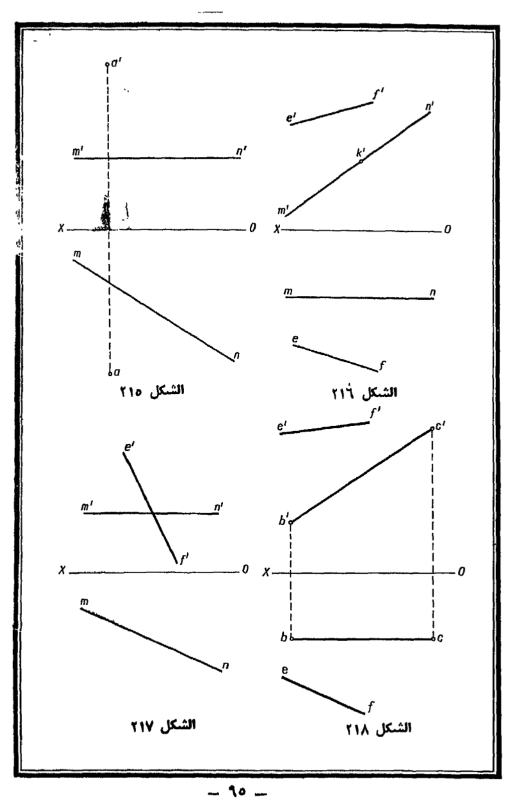
١١٧ – ارسم مثلثاً متساوي الأضلاع ABC ، قاعدته BC واقعة على المستقيم MN (الشكل ٢١٤).

١١٨ – ارسم مثلثاً متساوي الأضلاع ABC ، قاعدته BC واقعة على المستقيم MN شريطة أن تكون النقطة K أساساً للارتفاع (الشكل ٢١٩).

١١٩ – ارسم شبه منحرف قائم ABCD ، قاعدته الكبرى BC واقعة على المستقيم MN شريطة أن يكون AD = AB ، DC =1,15AB (الشكل ٢٢٠).

١٢٠ – ارسم مثلثاً متساوي الأضلاع ABC ، قاعدته BC واقعة على المستقيم MN شريطة أن يكون ارتفاعه AD يساوي 40 mm ويقع على المستقيم EF (الشكل ٢١٧).

١٢١ – ارسم مثلثاً متساوي الأضلاع ABC ، قاعدته BC تساوي 50 mm وتقع على المستقيم MN ، ورأسه A يقع على المستقيم EF ، العمودي على MN (الشكل ٢١٧).



الشكل ٢١٥

الشكل ٢١٦

الشكل ٢١٧

الشكل ٢١٨

١٢٢ ـ ارسم مثلثاً قائماً ABC ، ضلعه القائم BC واقع على المستقيم MN شريطة أن يكون وتره مساوياً 1,25 h (الشكل ٢٢٠) .

١٢٣ ـ ارسم مثلثاً قائماً ABC ، ضلعه القائم BC واقع على المستقيم MN شريطة أن تكون زاويته الحادة C مساوية 30° (الشكل ٢٢٠) .

١٢٤ ـ ارسم مثلثاً قائماً متساوي الساقين ABC ، وتره AC واقع على المستقيم MN (الشكل ٢٢١) .

١٢٥ ـ ارسم مثلثاً قائماً متساوي الساقين ABC ، ضلعه القائم BC واقع على المستقيم MN (الشكل ٢٢٠) .

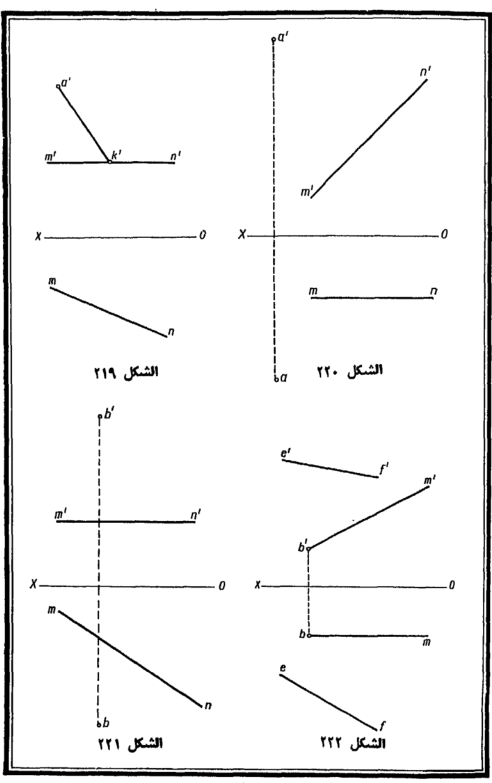
١٢٦ ـ ارسم مثلثاً قائماً ABC ، ضلعه القائم BC واقع على المستقيم MN ، شريطة أن يكون نصف قطر الدائرة المارة من رؤوس المثلث مساوياً 0,75 AB (الشكل ٢٢٠) .

١٢٧ ـ ارسم مثلثاً قائماً متساوي الساقين ABC ، ضلعه القائم BC واقع على المستقيم BM ، ورأسه A واقع على المستقيم EF (الشكل ٢٢٢).

١٢٨ ـ ارسم مثلثاً قائماً ABC ، قاعدته BC واقعة على المستقيم MN شريطة أن يكون ضلعه القائم AB الذي طوله 30 mm واقعاً على المستقيم EF ، وان تكون مساحة المثلث $0,75\ AB^2$ (الشكل ٢٢٣) .

١٢٩ ـ ارسم مستطيلاً ABCD ، ضلعه الكبير BC واقع على المستقيم MN شريطة أن تكون مساحته مساوية $1,5\ AB^2$ (الشكل ٢٢٠) .

١٣٠ ـ ارسم مستطيلاً ABCD ، ضلعه الكبير BC واقع على المستقيم MN شريطة أن تكون نسبة ضلعيه 1,5 (الشكل ٢٢٠) .



الشكل ٢١٩

الشكل ٢٢٠

الشكل ٢٢١

الشكل ٢٢٢

١٣١ – ارسم مستطيلاً ABCD ، ضلعه الكبير BC واقع على المستقيم BM شريطة أن تكون نسبة ضلعيه 2 (الشكل ٢٢٤) .

١٣٢ – ارسم مستطيلاً ABCD ، ضلعه الكبير BC واقع على المستقيم BM ، ورأسه A واقع على المستقيم EF شريطة أن يكون قطره مساوياً 2 AB (الشكل ٢٢٢) .

١٣٣ – ارسم مستطيلاً ABCD ، ضلعه الكبير BC واقـــع على المستقيم MN ، على أن يكون ضلعه AB الذي طوله 40 mm واقعـــاً على المستقيم EF ، وعلى أن تكون النسبة بين ضلعيه 1,5 (الشكل ٢٢٣) .

١٣٤ – ارسم مستطيلاً ABCD ، رأسه A واقع على المستقيم EF ، احسب مساحته (الشكل ٢٢٥) .

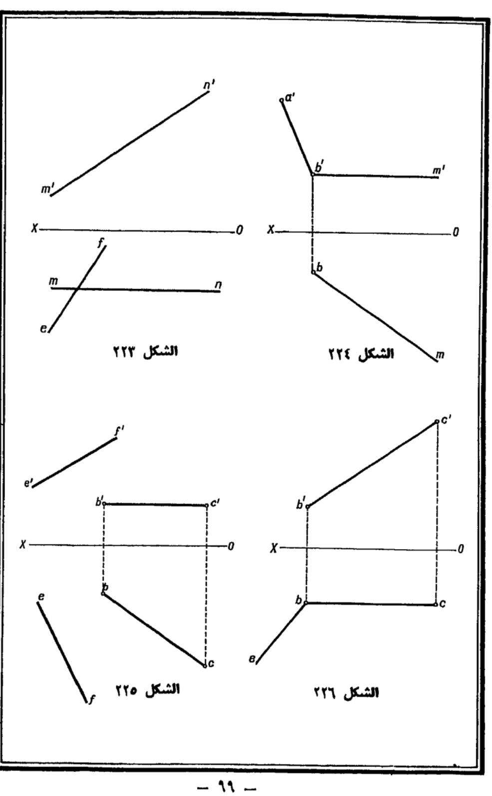
١٣٥ – ارسم مربعاً ABCD ، ضلعه BC يقع على المستقيم MN (الشكل ٢٢٠) .

١٣٦ – ارسم مربعاً ABCD ، قطره BD يقع على المستقيم MN (الشكل ٢١٤) .

١٣٧ – ارسم مربعاً ABCD ، ضلعه AB يقع على المستقيم BE (الشكل ٢٢٦) .

١٣٨ – ارسم مربعاً ABCD ، ضلعه BC يقع على المستقيم BM (الشكل ٢٢٤) .

١٣٩ – ارسم مربعاً ABCD ، ضلعه BC يقع على المستقيم BM شريطة أن


n'
m'
X
0
f
m
n
e
الشكل ٢٢٣
a'
b'
m'
X
0
b
m
الشكل ٢٢٤
f'
e'
b'
c'
X
0
b
e
c
f
الشكل ٢٢٥
c'
b'
X
0
b
c
e
الشكل ٢٢٦

يقع رأسه A على المستقيم EF (الشكل ٢٢٧) .

١٤٠ – ارسم مربعاً ABCD ، قطره BD يقع على المستقيم MN شريطة أن يقع رأسه A على المستقيم EF ، وان تكون النقطة K نقطة تقاطع قطريه . (الشكل ٢١٦) .

١٤١ – ارسم مربعاً ABCD ، قطره BD يقع على المستقيم MN (الشكل ٢٢٨) .

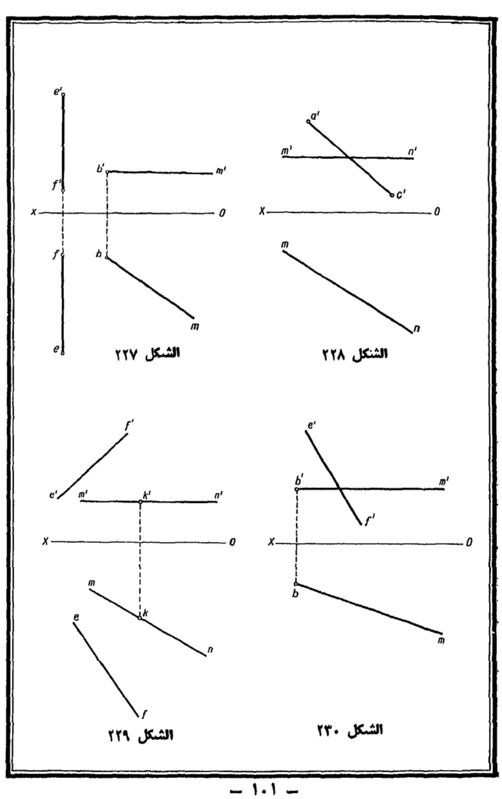
١٤٢ – ارسم متوازي أضلاع ABCD ، قاعدته BC واقعة على المستقيم MN شريطة أن تكون زاويته الحادة B مساوية 60° ، وأن يكون طول قطره AC أكبر بمقدار 5mm من ضلعه الجانبي (الشكل ٢٢٠) .

١٤٣ – ارسم متوازي أضلاع ABCD ، قاعدته BC واقعة على المستقيم MN شريطة أن يكون طول ضلعه الجانبي 1,25 h وأن تكون نسبة ضلعيه مساوية 2 (الشكل ٢٢٠) .

١٤٤ – ارسم شبه منحرف قائم ABCD ، قاعدته الكبرى BC واقعة على المستقيم MN شريطة أن يكون $AD = AB = \frac{2}{3} BC$ (الشكل ٢٢٠) .

١٤٥ – ارسم متوازي أضلاع ABCD ، ضلعه الكبير BC واقع على المستقيم MN ، ورأسه A واقع على المستقيم EF شريطة أن يكون ضلعه AB أكبر من ارتفاعه AK بمقدار 5mm ، وأن يكون ضلعه BC مساوياً 1,5Ak (الشكل ٢٢٩) .

١٤٦ – ارسم متوازي أضلاع ABCD ، ضلعه BC بطول 60mm يقع على



الشكل ٢٢٧

الشكل ٢٢٨

الشكل ٢٢٩

الشكل ٢٣٠

المستقيم BM شريطة أن يكون ارتفاعه AK واقعاً على المستقيم EF وأن يكون طول ضلعه الجانبي مساوياً 40 mm (الشكل ٢٣٠) .

١٤٧ – ارسم معيناً ABCD ، ضلعه BC واقع على المستقيم MN ، شريطة أن يكون طول ضلعه 1,2 h الشكل ٢٢٠) .

١٤٨ – ارسم معينا ABCD ، ضلعه BC واقع على المستقيم MN شريطة أن تكون زاويته الحادة B مساوية 60° (الشكل ٢٢٠) .

١٤٩ – ارسم معيناً ABCD ، قطره الكبير BD واقع على المستقيم MN شريطة أن تكون نسبة قطريه 2 (الشكل ٢١٥) .

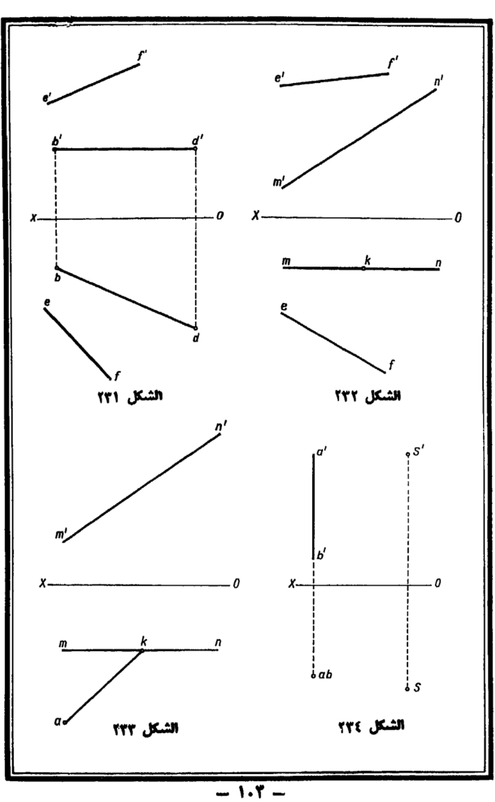
١٥٠ – ارسم معيناً ABCD ، ضلعه BC واقع على المستقيم MN شريطة أن يساوي ضلعه 1,2 من ارتفاعه AK (الشكل ٢١٩) .

١٥١ – ارسم شبه منحرف قائم ABCD ، قاعدته الكبرى BC واقعة على المستقيم MN شريطة أن يكون AD = AB ، وأن تكون الزاوية C مساوية 30° ، 45° ، 60° (الشكل ٢٢٠) .

١٥٢ – ارسم معيناً ABCD ، قطره الكبير BD واقع على المستقيم MN شريطة أن يكون قطره الصغير الذي طوله 40 mm واقعاً على المستقيم EF ، أما مساحة المعين فتساوي AC^2 (الشكل ٢١٧) .

١٥٣ – ارسم معيناً ABCD ، رأسه A واقع على المستقيم EF (الشكل ٢٣١) .

١٥٤ – ارسم مثلثاً متساوي الأضلاع ABC ، قاعدته BC تقع على المستقيم MN ، أما رأسه A فيقع على المستقيم EF ، شريطة أن تكون النقطة K أساساً لارتفاعه AK (الشكل ٢٣٢) .



الشكل ٢٣١

الشكل ٢٣٢

الشكل ٢٣٣

الشكل ٢٣٤

١٥٥ – ارسم متوازي أضلاع ABCD ، ضلعه الكبير BC واقع على المستقيم MN شريطة أن تكون النقطة K أساساً لارتفاعه وتقسم الضلع بنسبة $\frac{1}{2}$ من النقطة B نحو النقطة C ، وأن تكون الزاوية B مساوية $60°$ (الشكل ٢٣٣) .

١٥٦ – ارسم معيناً ABCD ، قطره الكبير BD واقع على المستقيم MN ، ورأسه A واقع على المستقيم EF ، شريطة أن تكون النقطة K نقطة تقاطع قطريه ، وأن تكون نسبة القطرين 2 . (الشكل ٢٣٢) .

١٥٧ – ارسم شبه منحرف قائم ABCD قاعدته الكبرى BC واقعة على المستقيم BM شريطة أن يكون $B = 90° , CD = 1,2\,AB , AD = AB$ (الشكل ٢٢٤) .

١٥٨ – ارسم شبه منحرف قائم ABCD ، قاعدته الكبرى BC واقعة على المستقيم BM شريطة أن تكون ذروته A واقعة على المستقيم EF : $B = 90° , AD = AB$ $C = \varphi°$ (الشكل ٢٢٧) .

١٥٩ – ارسم شبه منحرف قائم ABCD قاعدته الكبرى BC واقعة على المستقيم MN وضلعه AB واقع على المستقيم EF شريطة أن يكون $B = 90°$ ، $AB = AD = 40\text{ mm}$ ، $C = 45°$ (الشكل ٢٢٣) .

١٦٠ – ارسم شبه منحرف متساوي الساقين ABCD قاعدته الكبرى BC واقعة على المستقيم MN شريطة أن يكون $AB = AD = DC = 40\text{ mm}$ الشكل ٢٢٠) .

١٦١ – ارسم شبه منحرف متساوي الساقين ABCD قاعدته الكبرى BC واقعة

على المستقيم MN شريطة أن تكون زاويته الحادة مساوية $45°$ وأن تكون القاعدة الصغرى مساوية للضلع الجانبي (الشكل ٢٢٠) .

١٦٢ – مرر من النقطة S مستقيماً يميل بزاوية $70°$ على مستوي الإسقاط الأفقي ويبعد عن المستقيم AB بمقدار 20 mm (الشكل ٢٣٤) .

* * *

الفصل الثاني

البحث الحادي عشر

المستوي

يمكن أن يعطى المستوي في الفراغ بالعناصر الهندسية التالية :

١ – بثلاث نقاط غير واقعة على مستقيم واحد .

٢ – بمستقيم ونقطة غير واقعة على ذلك المستقيم .

٣ – بمستقيمين متقاطعين

٤ – بمستقيمين متوازيين .

إذا كان المستوي مائلاً على مستويات الإسقاط بشكل ما ندعوه بالمستوي ذي الوضعية العامة أو بالمستوي الكيفي .

إذا كان المستوي عمودياً على مستوي الإسقاط الأفقي ندعوه بالمستوي الشاقولي.

إذا كان المستوي عمودياً على مستوي الإسقاط الشاقولي ندعوه بالمستوي الأمامي.

إذا كان المستوي عمودياً على مستوي الإسقاط الجنبي ندعوه بالمستوي الموازي لخط الأرض .

النقطة المأخوذة على أحد المستقيمات المعينة للمستوي تقع في ذلك المستوي .

يقع المستقيم في المستوي إذا اشترك مع المستوي بنقطتين .

المستقيم الأفقي في المستوي هو المستقيم الواقع في ذلك المستوي والموازي لمستوي الإسقاط الأفقي .

المستقيم الجبهي في المستوي هو المستقيم الواقع في ذلك المستوي والموازي لمستوي الإسقاط الشاقولي .

خط الميل الأعظمي في المستوي هو المستقيم الواقع في ذلك المستوي والمتعامد مع مستقيم أفقي في المستوي .

تقع نقطة ما في المستوي إذا أخذت على مستقيم واقع في ذلك المستوي .
قبل حل الأمثلة المدرجة أدناه يجب تفهم المسائل ١٦٣ — ١٧١ .

أمثلـــة

● **المثال ٤٨ :** مرر مستقيماً اختيارياً ما في مستو مفروض بمستقيمين متوازيـــين AB و CD ‏(الشكل ٢٣٥) .

الحل : نأخذ على المستقيمين(ab،a′b′) (cd،c′d′) نقطتين اختياريتين (m،m′) (n،n′) ونمرر منها المستقيم (mn،m′n′) .

● **المثال ٤٩ :** مستوي مفروض بمستقيمين متقاطعين CD،AB . هل يقع المستقيم MN في هذا المستوي (الشكل ٢٣٦) ؟

الحل : لنرمز لنقاط تقاطع المساقط الشاقولية للمستقيمين AB و MN بالحرف k′ وللمستقيمين CD و MN بالحرف l′ . لننشىء مسقطيها الأفقيين — النقطتين l,k . من الإنشاء واضح أن النقطتين (k،k) و (l،l′) من المستقيم MN لاتقعان في المستوي المفروض بناء عليه المستقيم MN لا يقع في المستوي .

إن حل هذه المسألة يمكن أن نبدأه بتقاطع المساقط الأفقية ـ النقطتين l،k .

● **المثال ٥٠ :** مستوي مفروض بمستقيمين متوازيين AB و CD . إذا علم المسقط

الأفقي لمستقيم MN واقع في هذا المستوي ، أوجد مسقطه الشاقولي . (الشكل ٢٣٧) .

الحل : لنرمز لنقطة تقاطع المسقطين الافقيين للمستقيمين A B و MN بالحرف k وللمستقيمين CD و MN بالحرف l .

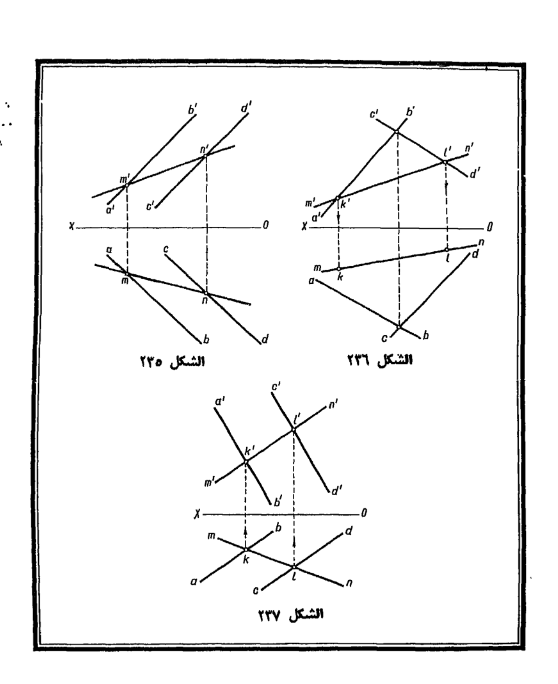
نعين بمساعدة النقطتين k و l النقطة k′ على المستقيم a′b′ والنقطة l' على المستقيم c′d′ ثم نرسم المسقط الشاقولي المنشود (m′n′) للمستقيم عبر النقطتين l'،k′ .

● **المثال ٥١ :** لدينا مستوي معين بمستقيم AB ونقطة C ، ارسم في المستوي مستقيماً أفقياً يبعد بمقدار 15mm عن مستوي الإسقاط الأفقي (الشكل ٢٣٨) .

الحل : قبل كل شيء نحول المستوي المعين بمستقيم ونقطة إلى مستوي معين مثلاً بمستقيمين متقاطعين . لهذا نأخذ نقطة ما (k,k′) على المستقيم (ab،a′b′) ونرسم مساقط المستقيم (ck،c′k′) . بعد ذلك نرسم على بعد 15 mm من خط الأرض المسقط الشاقولي (m′n′) للمستقيم الأفقي بصورة موازية لخط الأرض فيقطع المستقيمين a′b′ و c′k′ في النقطتين d′ و e′ . اخيراً نوجد النقطتين d و e على المستقيمين ab و ck وبوصلها نجد المسقط الأفقي (mn) للمستقيم الأفقي (على المخطط نبين حلاً واحداً) .

● **المثال ٥٢ :** لدينا مستوي معين بمستقيمين متوازيين A B و CD . ارسم مستقيماً جبهياً يبعد بمقدار 15 mm عن مستوي الإسقاط الشاقولي . (شكل ٢٣٩) .

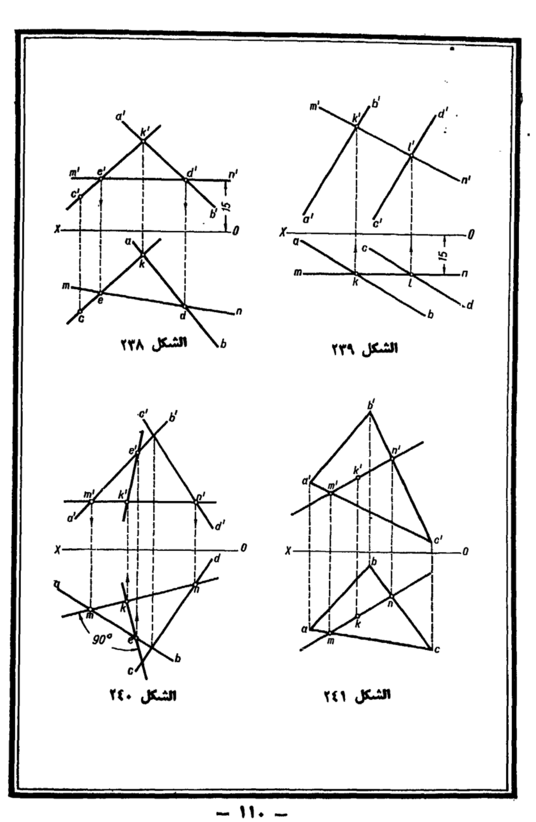
الحل : على بعد 15 mm من خط الأرض نرسم المسقط الأفقي (m n) للمستقيم الجبهي فيقطع المستقيمين ab و cd في النقطتين k و l . بعد ذلك نوجد النقطتين k′ و l' على المستقيمين a′b′ و c′d′ ونمرر منها المسقط الشاقولي (m′ n′) للمستقيم الجبهي (معطى حل واحد) .



الشكل ٢٣٥

الشكل ٢٣٦

الشكل ٢٣٧



الشكل ٢٣٨

الشكل ٢٣٩

الشكل ٢٤٠

الشكل ٢٤١

● **المثال ٥٣ :** لدينا مستوي معين بمستقيمين متقاطعين AB و CD ، ارسم في المستوي خط الميل الأعظم (الشكل ٢٤٠) .

الحل : نرسم في المستوي مستقيماً أفقياً (mn,m′n′) . بما أن خط الميل الأعظم يجب أن يكون عمودياً على هذا المستقيم الأفقي لذلك نرسم مسقطه الأفقي مثلاً (ek) بصورة عمودية على المسقط الأفقي (mn) للمستقيم الأفقي (نظرية إسقاط الزاوية القائمة) ، بعد ذلك نرسم بمساعدة المسقط الأفقي (ek) لخط الميل الأعظم مسقطه الشاقولي (e′k′) .

● **المثال ٥٤ :** خذ في مستوي المثلث ABC نقطة ما K (الشكل ٢٤١).

الحل : نرسم في مستوي المثلث مستقيماً مساعداً مثلاً (mn,m′n′) ونأخذ عليه نقطة ما (k,k′) . إن هذه النقطة تقع في مستوي المثلث .

● **المثال ٥٥ :** لدينا نقطة K ومستوي معين بنقطة C ومستقيم AB . هل تقع النقطة K في المستوي (الشكل ٢٤٢) ؟

الحل : نمرر من النقطتين k′,c′ المسقط الشاقولي لمستقيم مساعد فيقطع المستقيم a′b′ في النقطة m′ . نوجد النقطة m على المستقيم ab ثم نمرر من النقطتين c و m المسقط الأفقي (cm) للمستقيم المساعد . المستقيم (cm,c′m′) يقع في المستوي المفروض ، وكما نرى من المخطط النقطة K لا تقع على هذا المستقيم وبناء عليه فالنقطة K لا تقع في المستوي المفروض .

● **المثال ٥٦ :** لدينا مستوي معطى بمستقيمين متقاطعين AB و CD ، والمسقط الأفقي(k)لنقطة K واقعة في هذا المستوي . أوجد المسقط الشاقولي(k′)باستعمال مستقيم جبهي (الشكل ٢٤٣) .

الحل : نمرر من النقطة k المسقط الأفقي (mn) لمستقيم جبهي مساعد فيقطع المستقيمين ab و cd في النقطتين e و f . نوجد النقطتين e′ و f′ على المستقيمين a′b′ و c′d′

ونغور منها المسقط الشاقولي (m'n') للمستقيم الجبهي .إن المستقيم الجبهي (mn,m'n') يقع في المستوي المفروض فلكي تقع النقطة K في المستوي نأخذ النقطة k' على المستقيم m'n' .

مسائل

١٦٣ – ارسم مستوياً شاقولياً معيناً :

١ – بمستقيمين متقاطعين .

٢ – بمستقيم ونقطة .

١٦٤ – ارسم مستوياً جبهياً معيناً :

١ – بمستقيمين متوازيين .

٢ – بثلاث نقاط .

١٦٥ – ما هي ميزة العناصر الهندسية (على المخطط) الواقعة في مستوٍ شاقولي ؟

١٦٦ – ارسم مستوياً أمامياً معيناً :

١ – بمستقيمين متوازيين .

٢ – بثلاث نقاط .

١٦٧ – ارسم مستوياً أفقياً معيناً :

١ – بمستقيمين متقاطعين .

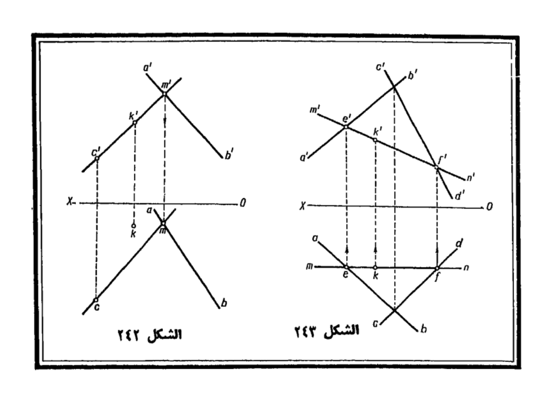
٢ – بمستقيم ونقطة .

١٦٨ – ما هي ميزة العناصر الهندسية (على المخطط) الواقعة في مستوٍ أمامي ؟

١٦٩ – ارسم مستوياً يوازي خط الأرض معيناً :

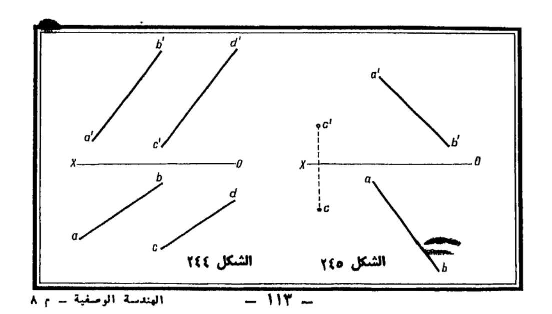
١ – بمستقيمين متقاطعين .

٢ – بمستقيمين متوازيين .



الشكل ٢٤٢

الشكل ٢٤٣



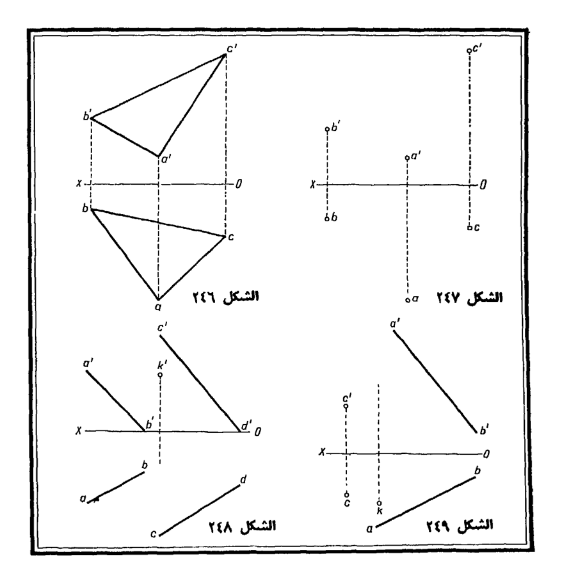
الشكل ٢٤٤

الشكل ٢٤٥

٣ ــ بمستقيم ونقطة .

٤ ــ بثلاث نقاط .

١٧٠ ــ ما هي ميزة العناصر الهندسية (على المخطط) التي تعين مستوي موازي لخط الأرض ؟



١٧١ – ارسم مستوياً في الوضعية العامة « كيفياً » معيناً :

١ – بمستقيمين متقاطعين .

٢ – بمستقيمين متوازيين .

٣ – بمستقيم ونقطة .

٤ – بثلاث نقاط .

١٧٢ – ارسم في المستوي المعطى المحل الهندسي لجميع النقاط التي تبعد عن المستوي H بمقدار 15 mm (الشكل ٢٤٤ – ٢٤٧) .

١٧٣ – ارسم في المستوي المعطى المحل الهندسي لجميع النقاط التي تبعد عن المستوي V بمقدار 15 mm (الشكل ٢٤٤ – ٢٤٧) .

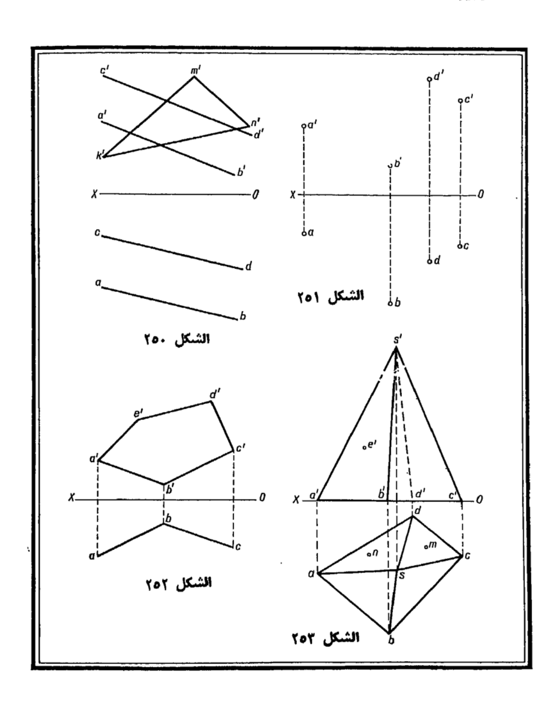
١٧٤ – لدينا المسقط الشاقولي لنقطة واقعة في مستوي معطى بمستقيمين متوازيين AB و CD . أوجد مسقطها الأفقي (الشكل ٢٤٨) .

١٧٥ – لدينا المسقط الأفقي لنقطة واقعة في مستوي معطى بمستقيم AB ونقطة C . أوجد مسقطها الشاقولي (الشكل ٢٤٩) .

١٧٦ – لدينا المسقط الشاقولي لمثلث KMN واقع في مستوي معطى بمستقيمين متوازيين AB و CD . أوجد المسقط الأفقي (الشكل ٢٥٠) .

١٧٧ – بين هل تقع النقاط الأربعة A ، B ، C ، D في مستوي واحد (الشكل ٢٥١) ؟

١٧٨ – عين المسقط الأفقي لخمس مستوي ABCDE ، إذا علم مسقطه الشاقولي ، والمسقط الأفقي لضلعين متجاورين (الشكل ٢٥٢) .


c'
m'
a'
n'
d'
k'
b'
X
O
c
d
a
b
الشكل ٢٥٠
d'
c'
a'
b'
X
O
a
c
d
b
الشكل ٢٥١
s'
d'
e'
c'
a'
b'
X
O
b
a
c
الشكل ٢٥٢
e'
a'
b'
d'
c'
d
m
n
c
a
s
b
الشكل ٢٥٣

١٧٩ – لدينا الهرم SABCD (الشكل ٢٥٣) .

١ – خذ نقطة ما K على وجهه SBC .

٢ – أوجد المسقط الشاقولي (m′) للنقطة M الواقعة على الوجه SCD إذا علمت مسقطها الأفقي m .

٣ – أوجد المسقط الأفقي (e) للنقطة E الواقعة على الوجه SAB إذ علمت مسقطها الشاقولي (e′) .

٤ – مرر من النقطة N من الوجه SAD خط الميل الأعظم .

البحث الثاني عشر

اعطاء المستوي بآثاره ، المستقيم والنقطة في المستوي

إن المستقيمات التي تعين المستوي يمكن أن تقع في الحالة الخاصة في مستويات الإسقاط نفسها . عندها ندعو هذه المستقيمات بآثار المستوي ، إذ أنه وفق هذه المستقيمات يتقاطع المستوي مع مستويات الإسقاط .

ندعو المستقيم الواقع في المستوي المعطى وفي مستوي الإسقاط الأفقي بالأثر الأفقي للمستوي .

ندعو المستقيم الواقع في المستوي المعطى وفي مستوي الإسقاط الشاقولي بالأثر الشاقولي للمستوي .

ندعو النقطة المشتركة بين الأثرين بنقطة إلتقاء أثري المستوي .

نرمز للمستوي المعين بأثريه بالحروف P ، Q ، R ، S ، T الخ .

نرمز للأثر الأفقي للمستوي بالحروف : P_h ، Q_h ، R_h ، S_h ، T_h الخ .

نرمز للأثر الشاقولي للمستوي بالحروف : P_v ، Q_v ، R_v ، S_v ، T_v الخ .

نرمز لنقطة إلتقاء الأثرين بالحروف : P_x ، Q_x ، R_x ، S_y ، T_x الخ .

إن أي نقطة واقعة على الأثر الأفقي أو الشاقولي للمستوي تقع في ذلك المستوي .

يقع المستقيم في المستوي إذا كان أثراه واقعين على أثري المستوي الموافقين .

إن المستقيم الأفقي في المستوي والأثر الأفقي للمستوي متوازيان فيما بينهما ، وعليه فمساقط المستقيم الأفقي في المستوي توازي المساقط الموافقة للأثر الأفقي للمستوي .

وكذلك المستقيم الجبهي في المستوي والأثر الشاقولي للمستوي متوازيان فيما بينها وعليه فمساقط المستقيم الجبهي في المستوي توازي المساقط الموافقة للأثر الشاقولي للمستوي .

إن خط الميل الأعظم للمستوي والأثر الأفقي للمستوي متعامدان فيما بينهما . ومنه فالمسقط الأفقي لخط الميل الأعظم للمستوي عمودي على الأثر الأفقي للمستوي (وبصورة أدق على المسقط الأفقي للأثر الأفقي للمستوي) .

مسائل

١٨٠ ــ ارسم مستوياً شاقولياً ما معيناً بأثريه . ماذا تساوي على المخطط الزاوية بين الأثر الأفقي لهذا المستوي وخط الأرض ؟

١٨١ – ارسم مستوياً جبهيـــاً معيناً بأثريه ويمر من الربع الأول والرابع ، الثاني والثالث .

١٨٢ – ارسم مستوياً أمامياً ما معيناً بأثريه . مـاذا تساوي على المخطط الزاوية بين الأثر الشاقولي لهذا المستوي وخط الأرض ؟

١٨٣ – ارسم مستوياً أفقيـــاً معيناً بأثريه ، ويمر من الربع الأول والثاني ، الثالث والرابـع .

١٨٤ – ارسم مستوياًمعيناً بأثريه يوازي خط الأرض ويمر من الأرباع: الثاني والأول والرابع ، الأول والثاني والثالث ، الأول والرابع والثالث ، الثاني والثالث والرابـع .

١٨٥ – ماذا يعني إندماج (على المخطط) أثري مستوي يوازي خط الأرض ؟

١٨٦ – ارسم مستوياً يمر من خط الأرض ومن الأرباع : الأول والثالث ، الثاني والرابـع .

١٨٧ – ارسم مستوياً ذو وضعية عامة بحيث يكون : حاداً ، منفرجاً ، أو ذو أثرين على استقامة واحدة .

١٨٨ – يعطى المستوي الموازي لمستوي الإسقاط الأفقي (أو الشاقولي) بأثر واحد فقط ، بينما لايعين المستقيم كما هو معروف مستوي وحيد في الفراغ. أليس في ذلك تناقض ؟

١٨٩ – ماذا يتطلب أن نضيف عنـد إعطاء مستوي يمر من خط الأرض بدلالة أثريه ؟

١٩٠ – أي المستقيمين هما أثران :

١ – لمستوي في الوضع العام (كيفي) .

٢ – لمستوي شاقولي .

٣ – لمستوي أمامي .

٤ – لمستوي يوازي خط الأرض .

١٩١ — ما هي على المخطط ميزة النقاط ، الخطوط ، المضلعات المستوية الواقعة :
١ — في مستوي شاقولي .
٢ — في مستوي أمامي .
٣ — في مستوي يوازي خط الأرض .
١٩٢ — كيف تتوضع على المخطط مساقط المستقيمات الأفقية في مستوي كيفي ما معين بأثريه ؟ (لماذا ؟)
١٩٣ — كيف تتوضع على المخطط مساقط المستقيمات الجبهية في مستوي كيفي ما معين بأثريه ؟ (لماذا ؟) .
١٩٤ — أي مستقيم يكون أفقياً في مستوي أمامي ؟
١٩٥ — أي مستقيم يكون جبهياً في مستوي شاقولي ؟
١٩٦ — أي مستقيم يكون أفقياً في مستوي يوازي خط الأرض ؟
١٩٧ — أي مستقيم يكون جبهياً في مستوي يوازي خط الأرض ؟
١٩٨ — أي مستقيم يكون ذا ميل أعظمي في مستوي يوازي خط الأرض ؟

أمثلــة

● **المثال ٥٧** : ارسم أثري مستوي معيّن بمستقيم AB ونقطة C (الشكل ٢٥٤) .

الحل : لنرمز للأثرين بـ p_v, p_h فلكي نعين الأثر الشاقولي (p_v) للمستوي يجب أن نعرف نقطتين من ذلك المستوي واقعتين في مستوي الإسقاط الشاقولي . إحدى النقطتين (c,c') معطاة، أما النقطة الثانية فهي الأثر الشاقولي (v,v') للمستقيم ($ab,a'b'$).
نوجد النقطة (v,v') ثم نرسم مساقط الأثر الشاقولي (p_v) للمستوي : الشاقولي — عبر النقطتين c' و v' حتى تقاطعه مع خط الأرض في p_x والأفقي — عبر النقطتين v,c

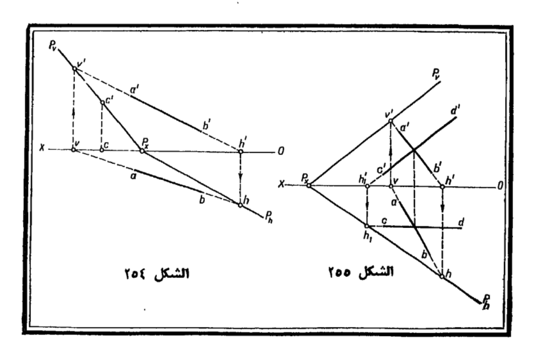
المنطبقتين مع خط الأرض . النقطة الأولى (p_x) للأثر الأفقي p_h معروفة . نوجد الأثر الأفقي (h.h') للمستقيم (ab,a'b') فنحصل على النقطة الثانية للأثر الأفقي للمستوي .

نرسم مساقط الأثر الأفقي (p_h) للمستوي: الأفقي – من النقطتين p_x,h والشاقولي – من النقطتين h',p_x المنطبقتين مع خط الأرض .

نتيجة : مع خط الأرض ينطبق دائماً المسقط الأفقي للأثر الشاقولي للمستوي وكذلك المسقط الشاقولي للأثر الأفقي للمستوي (لماذا ؟) .

● **المثال ٥٨ :** ارسم أثري مستوي معطى بمستقيمين متقاطعين AB و CD (الشكل ٢٥٥).

الحل : لنوجد الأثرين (h,h') و (v,v') للمستقيم (ab,a'b') ، والأثر (h_1,h'_1) للمستقيم (cd,c'd') . نرسم الأثر الأفقي (p_h) للمستوي P – من النقطتين h_1,h والأثر الشاقولي (p_v) – من النقطة v' ، وبصورة موازية للمستقيم c'd' (لماذا ؟).



الشكل ٢٥٤ الشكل ٢٥٥

الأثران p_v,p_h يجب أن يتقاطعا على خط الأرض في النقطة p_x مما يؤكد صحة حل المسألة .

● **المثال ٥٩ :** ارسم أثري مستوي معطى بمستقيم AB ونقطة C (الشكل ٢٥٦).

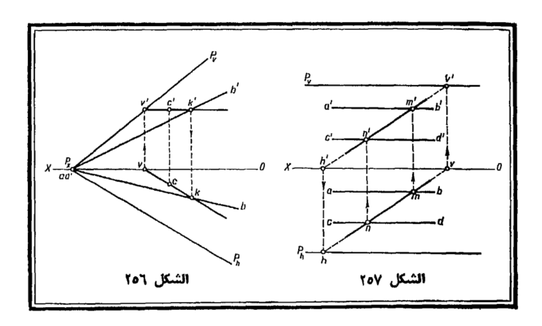
الحل : لنرمز للأثرين بالحرفين p_h و p_v . لننتقل من مستوي معطى بمستقيم ونقطة إلى مستوي معطى بمستقيمين متقاطعين ، لهذا نرسم من النقطة (c,c′) مستقيماً (أفقياً) موازياً لمستوي الإسقاط الأفقي فيقطع المستقيم (ab,a′b′) في النقطة (k,k′) . إن نقطة تلاقي أثري (p_x) المستوي ستكون النقطة من المستقيم (ab,a′b′) الواقعة على خط الأرض (لمــــاذا ؟) . بإيجاد الأثر الشاقولي (v,v′) للمستقيم الأفقي ، نرسم الأثر الشاقولي (p_v) للمستوي من النقطتين v',p_x . أمــــا الأثر الأفقي (p_h) للمستوي فيمر من النقطـــة p_x بصورة موازية للمسقط الأفقي للمستقيم الأفقي .

● **المثال ٦٠ :** ارسم أثري مستوي معطى بمستقيمين متوازيين AB و CD (الشكل ٢٥٧) .

الحل : المستقيمان AB و CD يعينان مستوياً موازياً لخط الأرض (لماذا ؟) . أثراه p_h و p_v يوازيان خط الأرض . لكي نرسم الأثر الأفقي (p_h) يلزمنا فقط نقطة واحدة من المستوي واقعة في مستوي الإسقـــاط الأفقي . ولكي نرسم الأثر الشاقولي (p_v) يلزمنـا فقط نقطة واحدة من المستوي واقعة في مستوي الإسقاط الشاقولي . المستقيمان (ab,a′b′) و (cd , c′d′) لايمكن أن يقطعا المستويين H و V . لنقطعهما بمستقيم ما مساعد MN ولنوجد أثريه .

في الحقيقة النقطتان (h,h′) و (v,v′) تقعان في المستوي المعطى لأنهما موجودتان على مستقيم واقع في المستوي . لنرسم من النقطة v′ الأثر الشــــاقولي

(p_v) للمستوي ـ بصورة موازية لخط الأرض ، ومن النقطة h ـ الأثر الأفقي (p_h) للمستوي ـ بصورة موازية أيضاً لخط الأرض .



الشكل ٢٥٦

الشكل ٢٥٧

نتيجة : للانتقال من المستوي المعطى بغير أثريه (مثلا بمستقيمين متقاطعين ، أو متوازيين) إلى مستوي معطى بأثريه يجب أن نوجد آثار المستقيمين المعطيين ونمرر منها أثري المستوي الموافقين .

في تلك الحالات عندما يعطى المستوي بمستقيم ونقطة أو بثلاث نقاط غير واقعة على مستقيم واحد يجب قبل كل شيء تعيين المستوي بمستقيمين متقاطعين أو متوازيين بعدها نتبع ماذكر أعلاه .

● **المثال ٦١ :** أوجد الأثر الجنبي للمستوي p (الشكل ٢٥٨)

الحل : الأثر الجنبي (p_w) للمستوي يجب أن يمر من الآثار الجنبية للمستقيمين (الأثرين) p_h و p_v . المستقيم p_v ليس له أثر جنبي . نوجـــد الأثر الجنبي (w) للمستقيم p_h ثم نرسم الأثر الجنبي (p_w) للمستوي عبر النقطة w موازياً للمحور OZ .

نرمز للنقطة w أيضاً بالحرف (p_v) .

● **المثال ٦٢ :** أوجد الأثر الجنبي للمستوي P (الشكل ٢٥٩ ، ٢٦٠) .

الحل : نوجد الأثرين الجنبيين (w) و (w_1) للمستقيمين (للأثرين) p_h ، و p_v ثم نمرر من النقطتين w و w_1 الأثر الجنبي المطلوب (p_w) للمستوي .

● **المثال ٦٣ :** هل يقع المستقيم AB في المستوي P (الشكل ٢٦١) ؟

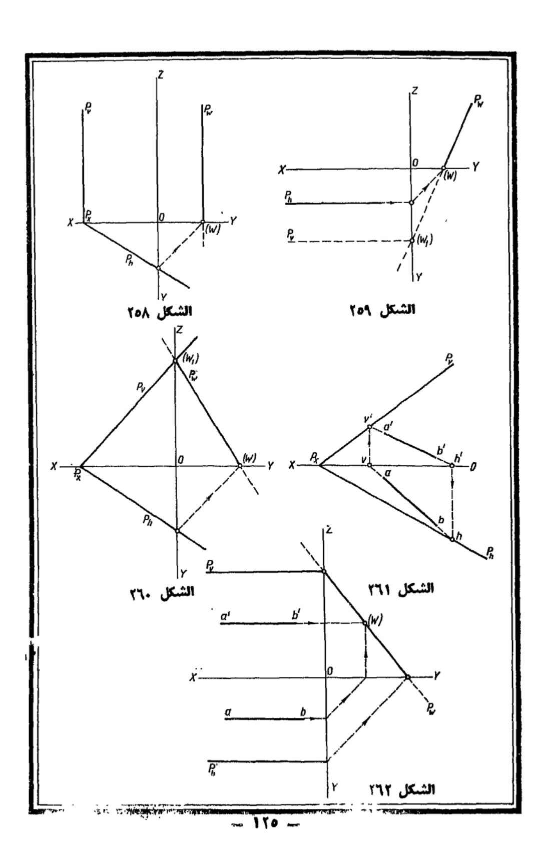
الحل : نرسم أثري المستقيم AB : الأفقي (h،h′) والشاقولي (v،v′) . إن أثري المستقيم المعطى (ab ، a′b′) يقعان على أثري المستوي الموافقين بناء عليه ، فالمستقيم AB يقع في المستوي (حسب النظرية) .

● **المثال ٦٤ :** هل يقع المستقيم AB في المستوي P (الشكل ٢٦٢) ؟

الحل : للمستقيم (ab , a′b′) أثر وحيد جنبي . لنرسم أثر المستقيم والأثر الجنبي للمستوي . الأثر الجنبي (w) للمستقيم يقع على الأثر الجنبي (p_w) للمستوي . بناء عليه فالمستقيم AB يقع في المستوي P .

نبيّن أدناه حل هذه المسألة دون الاستعانة بمستوي الاسقاط الجنبي .

● **المثال ٦٥ :** ارسم في المستوي P مستقيماً ما يمر من الربع الثاني والاول والرابع (الشكل ٢٦٣) .



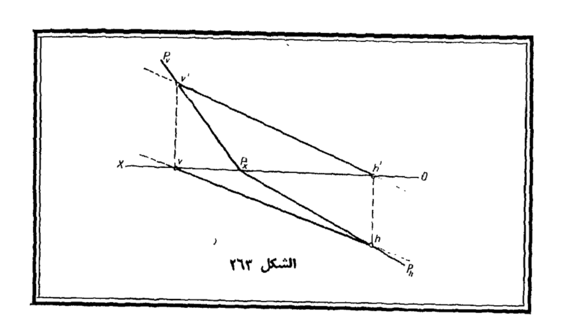
الشكل ٢٥٨

الشكل ٢٥٩

الشكل ٢٦٠

الشكل ٢٦١

الشكل ٢٦٢



الشكل ٢٦٣

الحل : من المعلوم أن أثري المستقيم المطلوب يجب أن يقعا على الأثرين الموافقين للمستوي المفروض . إن أي مستقيم يمر من الربع الثاني والأول والرابع له أثر أفقي في الحقل الأمامي من مستوي الاسقاط الأفقي ، وله أثر شاقولي في الحقـــل العلوي من مستوي الاسقاط الشاقولي و هما يتوضعان على المخطط بالشكل التالي : الشاقولي ـ فوق خط الأرض ، الأفقي ـ تحت خط الأرض

لنأخذ بصورة اختيارية على الأثر الأفقي (p_h) للمستوي نقطة الأثر (h,h') وعلى الأثر الشاقولي (p_v) نقطة الأثر (v,v') ثم نرسم مسقطي المستقيم المطلوب : الأفقي ـ عبر النقطتين h و v والشاقولي ـ عبر النقطتين h' و v' .

● **المثال ٦٦ :** ارسم في المستوي P مستقيماً ما ماراً من الربع الثالث والرابع (الشكل ٢٦٤) .

الحل : للمستقيم المار من الربع الثالث والرابع أثر وحيد شاقولي في الحقل السفلي من مستوي الاسقاط الشاقولي . وهو يتوضع على المخطط تحت خط الأرض . لنأخذ على الأثر الشاقولي (p_v) للمستوي نقطة (v,v') ولنرسم منها مسقطي المستقيم المطلوب (الأفقي) : الشاقولي — عبر النقطة v' موازياً لخط الأرض والأفقي — عبر النقطة v موازياً للأثر الأفقي ((p_h)) للمستوي .

● **المثال ٦٧** : ارسم في المستوي P مستقيماً مـــاراً من الربـع الثاني والثالث (الشكل ٢٦٥) .

الحل : للمستقيم المار من الربـع الثاني والثالث أثر وحيد أفقي في الحقل الخلفي من مستوي الاسقاط الأفقي ، وهو يتوضع على المخطط فوق خط الأرض . لنأخذ على امتداد الأثر الأفقي (p_h) للمستوي نقطة (h,h') ولنرسم منهـــا مسقطي المستقيم المطلوب (الجبهي) : الافقي — عبر النقطة h موازياً لخط الأرض ، والشاقولي — عبر النقطة h' موازياً للأثر الشاقولي (p_v) للمستوي .

● **المثال ٦٨** : ارسم في المستوي P مستقيماً يوازي خط الأرض ويقع في الربـع الثالث (الشكل ٢٦٦) .

الحل : إن المسقط الجنبي للمستقيم المطلوب هـــو بشكل نقطة ويجب أن يقع على الأثر الجنبي المستوي المعطى . لننشىء الأثر الجنبي (p_w) للمستوي ، ولنأخـذ عليه نقطة ما ولنرمز لهـا بـ $m''n''$. بمعرفـة المسقط الجنبي ($m''n''$) للمستقيم نرسم مسقطيه الأفقي (mn) والشاقولي ($m'n'$) — حسب القاعدة العامة .

● **المثال ٦٩** : لدينا مستوي P ونقطة A . هل تقع النقطة في المستوي (الشكل ٢٦٧) ؟

الحل : المسقط الأفقي لأي نقطة من المستوي الشاقولي كما هو معروف تقع على الأثر الأفقي للمستوي . في الحـــالة المعطاة المسقط الأفقي (a) للنقطة يقع

على امتداد الأثر الأفقي (p_h) للمستوي . بناء عليه فالنقطة المعطاة ('a،a) تقع في المستوي P .

● **المثال ٧٠ :** لدينا نقطة A ومستوي P . هل تقع النقطة في المستوي (الشكل ٢٦٨) ؟

الحل : المسقط الشاقولي لأي نقطة من المستوي الأمامي كما هو معروف يقع على الأثر الشاقولي المستوي . في الحالة المعطاة المسقط الشاقولي ('a) للنقطة لايقع على الأثر الشاقولي (p_v) للمستوي . بناء عليه فالنقطة المعطاة ('a, a) لاتقع في المستوي P.

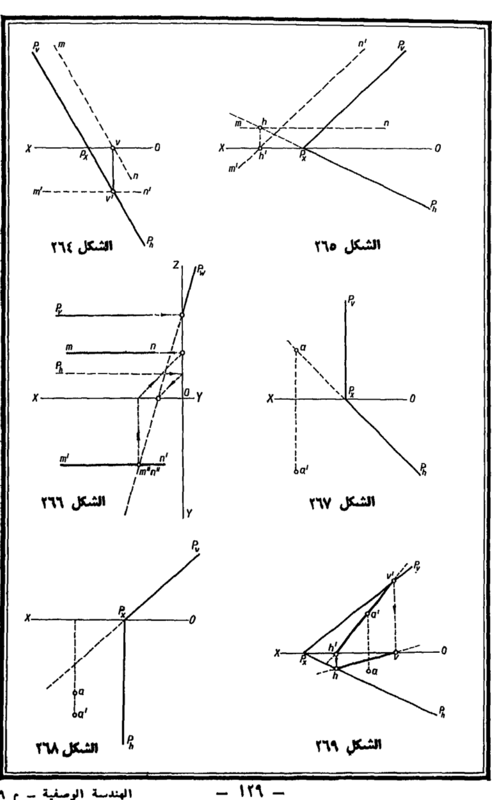
● **المثال ٧١ :** لدينا مستوي P ونقطة A . هل تقع النقطة في المستوي (الشكل ٢٦٩ — ٢٧١) ؟

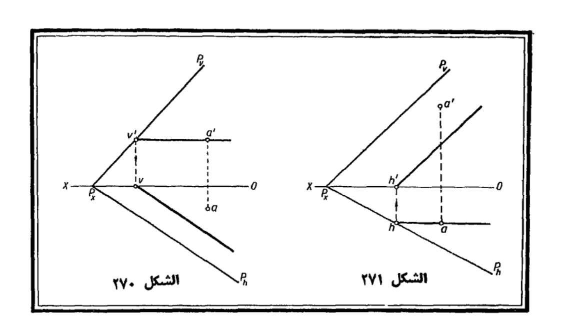
الحل : بما أن المستوي ذو وضعية عامة لذلك نستعمل مستقيماً مساعداً .

١ — نرسم من المسقط الشاقولي ('a) للنقطة مسقطاً شاقولياً ما ('h'v) لمستقيم مساعد ، ثم بمساعدة 'h'v نوجد المسقط الأفقي (hv) للمستقيم المساعد . المسقط الأفقي (a) للنقطة لا يقع على المستقيم hv . بناء عليه فالنقطة المعطاة ('a,a) لا تقع في المستوي P .

يمكن أن نبدأ حل المسألة كذلك برسم المسقط الأفقي (hv) للمستقيم المساعد عبر المسقط الأفقي (a) للنقطة . الخ .

٢ — الحل بمساعدة مستقيم أفقي : نمرر من المسقط الشاقولي ('a) للنقطة المسقط الشاقولي لمستقيم أفقي — بصورة موازية لخط الأرض حتى يقطع الأثر الشاقولي (p_v) للمستوي في النقطة 'v . بمساعدة 'v نوجد على خط الأرض النقطة v ، ونرسم منها المسقط الأفقي للمستقيم الأفقي — بصورة موازية للأثر الأفقي (p_h) للمستوي . النقطة ('a ,a) لا تقع على المستقيم الأفقي في المستوي . بناء عليه فالنقطة المفروضة ('a,a) لا تقع في المستوي P


الشكل ٢٦٤
الشكل ٢٦٥
الشكل ٢٦٦
الشكل ٢٦٧
الشكل ٢٦٨
الشكل ٢٦٩



الشكل ٢٧٠

الشكل ٢٧١

يمكن أن نبدأ حل المسألة برسم المسقط الأفقي للمستقيم الأفقي من المسقط الأفقي (a) للنقطة ـ بصورة موازية للأثر الأفقي للمستوي الخ .

٣ ـ الحل بمساعدة مستقيم جبهي : نرسم من المسقط الأفقي (a) للنقطة المسقط الأفقي للمستقيم الجبهي موازياً لخط الأرض فيقطع الأثر الأفقي (p_h) للمستوي في النقطة h . بمساعدة النقطة h نوجد على خط الأرض النقطة h′ ثم نمرر منها المسقط الشاقولي للمستقيم الجبهي موازياً للأثر الشاقولي (p_v) للمستوي . إن النقطة (a،a′) لا تقع على المستقيم الجبهي في المستوي . بناء عليه فالنقطة (a،a′) لا تقع في المستوي P .

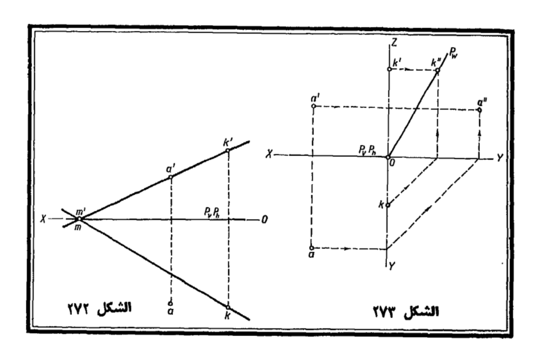
يمكن أن نبدأ حل المسألة برسم المسقط الشاقولي للمستقيم الجبهي من المسقط الشاقولي (a′) للنقطة ـ موازياً للأثر الشاقولي للمستوي ـ الخ .

● **المثال ٧٢ :** لدينا مستوي P ونقطة A . هل تقع النقطة في المستوي (الشكل ٢٧٢ و٢٧٣) ؟

الحل : نستعمل مستقيماً مساعداً (mk،m'k') واقعاً في المستوي P .

نمرر من المسقط الشاقولي (a') للنقطة المسقط الشاقولي للمستقيم المساعد ماراً من النقطة k' ، فيقطع خط الأرض في النقطة (m،m') . من النقطتين m و k نرسم المسقط الأفقي للمستقيم المساعد . إن النقطة (a،a') لا تقع على المستقيم المساعد (mk،m'k') ، بناء عليه فالنقطة (a،a') لا تقع في المستوي P .

يمكن أن نحل هذه المسألة بطريقة ثانية . المسقط الجنبي لأي نقطة من مستوي موازي لخط الأرض كما هو معروف يقع على الأثر الجنبي للمستوي . نعين الأثر الجنبي (p_w) للمستوي والمسقط الجنبي (a") للنقطة . بالتالي نستنتج ان النقطة (a،a') لا تقع في المستوي P .



الشكل ٢٧٢

الشكل ٢٧٣

● **المثال ٧٣ :** لدينا مستوي P ومستقيم MN .

هل يقع المستقيم في المستوي (الشكل ٢٧٤) ؟

الحل : نحل هذه المسألة بدون استعمال مستوي الإسقاط الجنبي . لنأخذ على المسقط الشاقولي (m′n′) للمستقيم نقطة ما (a′) ولنرسم منها المسقط الشاقولي (h′v′) لمستقيم مساعد واقع في المستوي P . بمساعدة المسقط (h′v′) نوجد المسقط الأفقي (hv) للمستقيم ومن ثم a′ للنقطة a .

النقطة (a،a′) تقــع على المستقيم (hv،h′v′) كذلك المستقيم (mn،m′n′) يمر من النقطة (a،a′) الواقعة في المستوي P ، لهذا فهو يقع في هذا المستوي .

● **المثال ٧٤ :** لدينا مستوي P والمسقط الأفقي (a) للنقطة A الواقعة في هذا المستوي . أوجد مسقطها الشاقولي a′ (الشكل ٢٧٥) .

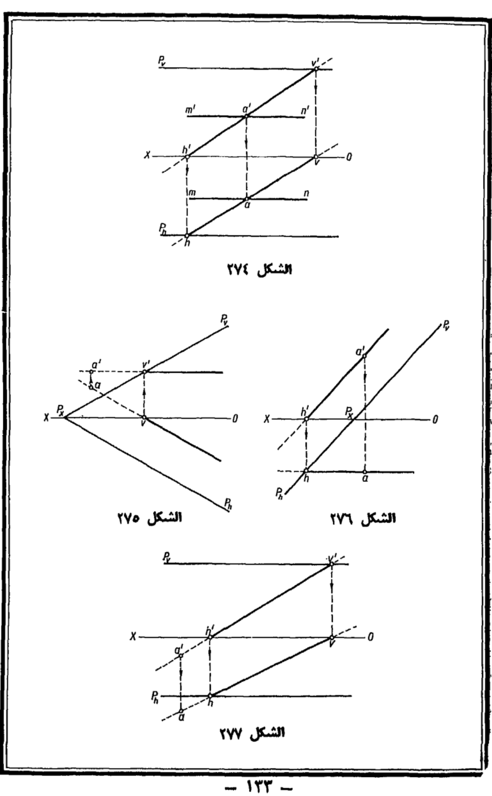
الحل : بما أن المستوي المعطى كيفي لذلك نستعمل مستقيماً مساعداً ما (مثلاً أفقياً). لنرسم من المسقط الأفقي (a) للنقطة المسقط الأفقي لمستقيم أفقي موازيــاً للأثر الأفقي (p_h) للمستوي ، فيقطع خط الأرض في النقطة v . بمساعدة النقطة v نوجد النقطة v′ على الأثر الشاقولي (p_v) للمستوي ، ونمرر منها المسقط الشاقولي للمستقيم الأفقي موازياً لخط الأرض .

بواسطة النقطة (a) نوجد النقطة (a′) على المسقط الشاقولي للمستقيم الأفقي .

في حالة إعطاء المسقط الشاقولي للنقطة يبدأ حل المسألة برسم المسقط الشاقولي للمستقيم الأفقي من المسقط الشاقولي للنقطة موازياً لخط الأرض الخ .

● **المثال ٧٥ :** لدينا مستوي P والمسقط الشاقولي (a′) للنقطة A الواقعة في هذا المستوي . أوجد مسقطها الأفقي a (الشكل ٢٧٦) .

الحل : نحل المسألة بمساعدة مستقيم جبهي . نرسم من المسقط الشاقولي (a′) للنقطة

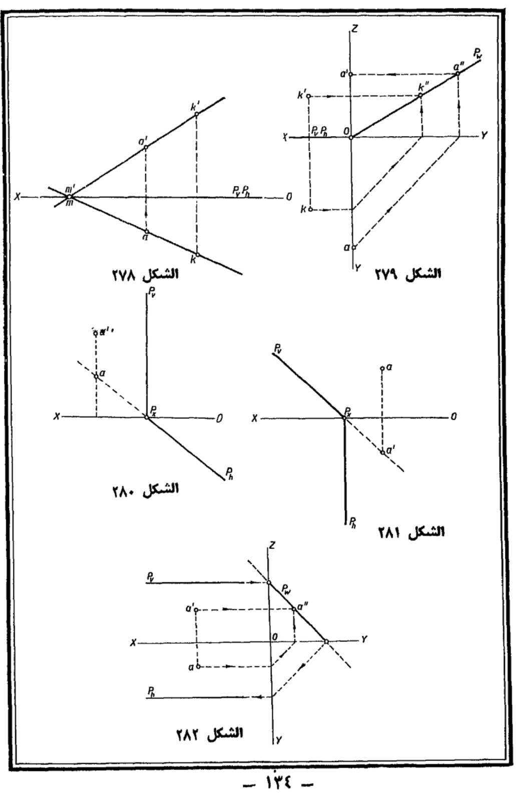


الشكل ٢٧٤

الشكل ٢٧٥

الشكل ٢٧٦

الشكل ٢٧٧



الشكل ٢٧٨

الشكل ٢٧٩

الشكل ٢٨٠

الشكل ٢٨١

الشكل ٢٨٢

المسقط الشاقولي للمستقيم الجبهي ـ موازياً للأثر الشاقولي (p_v) للمستوي فيقطع خط الأرض في النقطة h′ . بمساعدة النقطة h′ نوجد على الأثر الأفقي (p_h) للمستوي النقطة h التي نرسم منها المسقط الأفقي للمستقيم الجبهي ـ موازياً لخط الأرض . بمساعدة النقطة a′ نوجد النقطة a على المسقط الأفقي للمستقيم الجبهي .

في حالة إعطاء المسقط الأفقي للنقطة نبدأ حل المسألة برسم المسقط الأفقي للمستقيم الجبهي من المسقط الأفقي للنقطة موازياً لخط الأرض الخ .

● **المثال ٧٦ :** لدينا مستوي P والمسقط الشاقولي (a′) للنقطة A الواقعة في هذا المستوي . أوجد مسقطها الأفقي a (الشكل ٢٧٧) .

الحل : نمرر من المسقط الشاقولي (a′) للنقطة المسقط الشاقولي (h′v′) للمستقيم المساعد في المستوي P . بواسطة h′v′ نوجـــد المسقط الأفقي (hv) للمستقيم وعليه نوجد المسقط الأفقي (a) للنقطة بمساعدة النقطة a′ .

يمكن حل هذه المسألة بطريقة أخرى . من المعروف أن المسقط الجنبي (a″) للنقطة يجب أن يقـع على الأثر الجنبي (p_w) للمستوي . بمعرفـة (p_w) للمستوي وبمساعدة المسقط الشاقولي (a′) للنقطة نوجد المسقط الجنبي (a″) للنقطة . بعد ذلك حسب القـاعدة العامة وبمساعدة a′ و a″ نوجد المسقط الأفقي (a) للنقطة (يجب إنجاز المخطط من قبل الطالب) .

● **المثال ٧٧ :** لدينا مستوي P والمسقط الأفقي (a) للنقطة A الواقعة في هـــذا المستوي . أوجد مسقطها الشاقولي a′ (الشكل ٢٧٨ ، ٢٧٩) .

الحل : نمرر من المسقط الأفقي (a) للنقطة المسقط الأفقي (ak) لمستقيم مساعد ، فيقطـع خط الأرض في النقطة (m,m′) . بواسطة المسقط الأفقي (km) للمستقيم

نوجد مسقطه الشاقولي ($k'm'$) وعليه نوجد المسقط الشاقولي المنشود (a') للنقطة .

يمكن أن نحل هذه المسألة بطريقة ثانية . بما أن المسقط الجنبي (a'') للنقطة يجب أن يقع على الأثر الجنبي (p_w) للمستوي ، لذا نوجد هذا الأثر ومن ثم المسقط الجنبي (a'') للنقطة ، بعد ذلك نوجد المسقط الشاقولي المطلوب (a') للنقطة .

● **المثال ٧٨ :** لدينا الأثر الشاقولي (p_v) للمستوي P والنقطة A الواقعة في هذا المستوي . أوجد الأثر الأفقي (p_h) للمستوي (الشكل ٢٨٠) .

الحل : إن الأثر الشاقولي (p_v) للمستوي عمودي على خط الأرض ، بناء عليه فالمستوي نفسه شاقولي . بما أن النقطة المعطاة (a,a') تقع في المستوي P لذلك نرسم الأثر الأفقي (p_h) للمستوي من المسقط **الأفقي** (a) للنقطة والنقطة p_x .

● **المثال ٧٩ :** لدينا الأثر الأفقي (p_h) للمستوي P والنقطة A الواقعة في هذا المستوي أوجد الأثر الشاقولي (p_v) للمستوي (الشكل ٢٨١) .

الحل : إن الأثر الأفقي (p_h) للمستوي عمودي على خط الأرض ، بناء عليه فالمستوي نفسه أمامي . بما أن النقطة المعطاة (a,a') تقع في المستوي P لذلك نرسم الأثر الشاقولي (p_v) للمستوي من المسقط الشاقولي (a') للنقطة والنقطة p_x .

● **المثال ٨٠ :** لدينا الأثر الشاقولي (p_v) للمستوي P والنقطة A الواقعة في هذا المستوي . أوجد الأثر **الأفقي** (p_h) للمستوي (الشكل ٢٨٢ ، ٢٨٣) .

الحل : إن الأثر الشاقولي (p_v) للمستوي يوازي خط الأرض ، بناء عليه فالمستوي نفسه يوازي خط الأرض . بما أن النقطة المفروضة (a,a') تقع في المستوي P لذلك فمسقطها الجنبي (a'') يجب أن يقع على الأثر الجنبي (p_w) للمستوي .

بمرور الاثر الجنبي (p_w) للمستوي من الأثر الجنبي للمستقيم p_v والمسقط الجنبي (a″) للنقطة المفروضة . بمعرفـــة الأثر p_w للمستوي نرسم الأثر الأفقي (p_h) للمستوي من المسقط الأفقي للأثر الجنبي موازياً لخط الأرض .

يمكن حل هذه المسألة بدون استعمال مستوي الإسقاط الجنبي ، ولكن في هذه الحالة يستعمل مستقيم مساعد ما . نرسم في المستوي P من المسقط الشاقولي (a′) للنقطة المسقط الشاقولي (h′v′) للمستقيم المساعد . بمساعــدة المسقط الشاقولي (h′v′) للمستقيم نوجد مسقطه الأفقي (hv) ونرسم الأثر الأفقي (p_h) للمستوي من الأثر الأفقي للمستقيم ـ موازياً لخط الأرض .

● **المثال ٨١ :** لدينا الأثر الأفقي (p_h) للمستوي P والنقطة A الواقعة في هذا المستوي . أوجد الأثر الشاقولي (p_v) للمستوي (الشكل ٢٨٤ — ٢٨٦).

الحل : بما أن المستوي كيفي لذا نستعمل مستقيم مساعد .

١ — نرسم في المستوي P ومن المسقط الأفقي(a) للنقطة المسقط الأفقي (hv) لمستقيم مساعد ، ومن ثم نوجد مسقطه الشاقولي (h′v′) . بعد ذلك نرسم الأثر الشاقولي (p_v) للمستوي من النقطتين v و p_x .

يمكن حل هذه المسألة بصورة أسهل بمساعــدة المستقيمات الرئيسيه في المستوي ـ الأفقية أو الجبهية .

٢ — نرسم مساقط المستقيم الأفقي في المستوي من مساقط النقطة (a,a′) : الأفقي — من النقطة a — موازياً للأثر الأفقي (p_h) للمستوي ، الشاقولي — من النقطة a′ — موازياً لخط الأرض . بـــإيجاد الأثر (v,v′) للمستقيم الأفقي في المستوي نرسم الأثر الشاقولي (p_v) من النقطتين v′ و p_x .

٢ ــ نرسم من المسقط الأفقي (a) للنقطة المسقط الأفقي للمستقيم الجبهي(كيف؟)ــ فيقطع الأثر الأفقي (p_h) للمستوي في النقطة h . بإيجاد النقطة h′ على خط الأرض نرسم من a′,h′ المسقط الشاقولي للمستقيم الجبهي كما نرسم بصورة موازية له الأثر الشاقولي (p_v) للمستوي من النقطة p_x .

● **المثال ٨٢ :** لدينا الأثر الشاقولي (p_v) للمستوي P ونقطة A واقعة في هذا المستوي . أوجد الأثر الأفقي (p_h) للمستوي (الشكل ٢٨٧ ، ٢٨٨) .

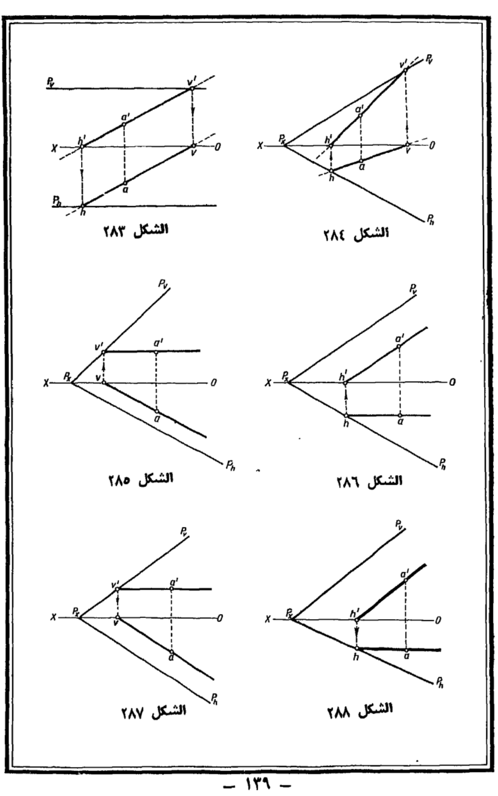
الحل : ١ ــ نمرر من المسقط الشاقولي (a′) للنقطة المسقط الشاقولي لمستقيم أفقي في المستوي P ــ موازياً لخط الأرض فيقطع الأثر الشاقولي (p_v) للمستوي في النقطة v′ . بإيجاد النقطة v على خط الأرض نمرر من النقطة a و v المسقط الأفقي للمستقيم الأفقي في المستوي وبصورة موازية له الأثر الأفقي المطلوب (p_h) للمستوي من النقطة p_x .

٢ ــ نمرر من مساقط النقطـــة (a,a′) مساقط مستقيم جبهي في المستوي : الشاقولي ــ من النقطة a′ موازياً للأثرالشاقولي (p_v) للمستوي ، الأفقي ــ من النقطة a موازياً لخط الأرض . بإيجاد الأثر الأفقي (h,h′) للمستقيم الجبهي نرسم الأثر الأفقي المطلوب (p_h) للمستوي من النقطتين h و p_x .

● **المثال ٨٣ :** لدينا نقطة A واقعة في المستوي الشاقولي P ونقطة إلتقاء أثري المستوي (p_x) . أرسم أثري المستوي . (الشكل ٢٨٩) .

الحل : بما أن المستوي المطلوب شاقولي ، فالمسقط الأفقي (a) للنقطة A يجب أن يقع على الأثر الأفقي (p_h) للمستوي . الأثر الشاقولي (p_v) يجب أن يكون عمودياً على خط الأرض . نرسم أثري المستوي : الأفقي (p_h) ــ من النقطتين p_x و a ، والشاقولي (p_v) ــ من النقطة p_x عمودياً على خط الأرض .

نتيجة : إذا كان المستوي الشاقولي يمر من نقطة ما ، فالأثر الأفقي لهذا المستوي



الشكل ٢٨٣

الشكل ٢٨٤

الشكل ٢٨٥

الشكل ٢٨٦

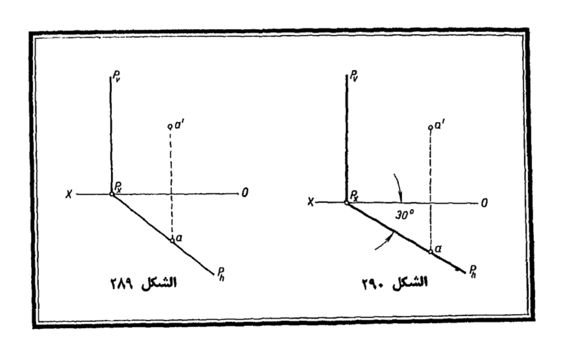
الشكل ٢٨٧

الشكل ٢٨٨

سيمر من المسقط الأفقي لهذه النقطة .

● **المثال ٨٤ :** لدينا نقطة A . مرر منها مستوياً P عمودياً على مستوي الإسقاط الأفقي ويصنع مع مستوي الإسقاط الشاقولي زاوية 30° (الشكل ٢٩٠) .

الحل : تتعين الزاوية الكائنة بين المستوي الشاقولي ومستوي الإسقاط الشاقولي بالزاوية بين الأثر الأفقي للمستوي وخط الأرض . ومنه نرسم من المسقط الأفقي (a) للنقطة الأثر الأفقي (p_h) للمستوي صانعاً زاوية 30° مع خط الأرض فيقطعه في النقطة p_x بعد ذلك نرسم من النقطة p_x الأثر الشاقولي (p_v) للمستوي عمودياً على خط الأرض (معطى حل واحد) .



الشكل ٢٨٩ الشكل ٢٩٠

● **المثال ٨٥ :** مرر من النقطة A مستوياً P عمودياً على مستوي الإسقاط الشاقولي (الشكل ٢٩١) .

الحل : بما أن النقطة (a,a') يجب أن تقع في المستوي الأمامي فكما هو معروف مسقطها الشاقولي يجب أن يقع على الأثر الشاقولي (p_v) للمستوي عدا عن ذلك الأثر الأفقي (p_h) يجب أن يكون عمودياً على خط الأرض . من النقطة يمكن رسم مستويات كثيرة ، لذلك نأخذ نقطة ما على خط الأرض p_x ونرسم منها أثري المستوي : الشاقولي (p_v) – من النقطتين a' و p_x والأفقي (p_h) – من النقطة p_x عمودياً على خط الأرض .

نتيجة : إذا كان المستوي أمامياً ويمر من نقطة فالأثر الشاقولي لهذا المستوي سيمر من المسقط الشاقولي للنقطة .

● **المثال ٨٦ :** لدينا نقطة A . مرر منها مستوياً P عمودياً على مستوي الإسقاط الشاقولي ويشكل مع مستوي الإسقاط الأفقي زاوية $60°$ (الشكل ٢٩٢) .

الحل : إن الزاوية الكائنة بين المستوي الأمامي ومستوي الإسقاط الأفقي تتعين بالزاوية بين الأثر الشاقولي للمستوي وخط الأرض .

لذلك نمرر من المسقط الشاقولي (a') للنقطة الأثر الشاقولي (p_v) للمستوي صانعاً مع خط الأرض زاوية $60°$ فيقطعه بالنقطة p_x . بعد ذلك نمرر من النقطة p_x الأثر الأفقي (p_h) للمستوي عمودياً على خط الأرض (معطى حل واحد) .

● **المثال ٨٧ :** مرر من النقطة A مستوياً P موازياً لخط الأرض ماراً من الربع الأول والثاني والثالث (الشكل ٢٩٣) .

الحل : بما أن المستوي P يوازي خط الأرض فإنه [illegible] يجب أن يمر من المسقط الجنبي (a'') للنقطة المفروضة . إن أثريه [illegible] يجب أن يكونا موازيين لخط الأرض . إن لأي مستوٍ [illegible]

والثالث أثر أفقي (p_h) واقع في الحقل الخلفي لمستوي الاسقاط الأفقي وأثر شاقولي (p_v) في الحقل العلوي لمستوي الاسقاط الشاقولي وكلاهما يتوضعان على المخطط فوق خط الأرض. لنوجد المسقط الجنبي (a'') للنقطة المفروضة ولنمرر منها بصورة كيفية الأثر الجنبي (p_w) للمستوي فيقطع المحورين oz و oy في النقطتين w (الاثر الجنبي للمستقيم p_h) و w_1 (الأثر الجنبي للمستقيم p_v) بعد ذلك نعين p_h و p_v (انظر المخطط) .

ملاحظة : فيما يلي نبين كيف نرسم من نقطة مستوياً ذو وضعية عـــامة (كيفياً) .

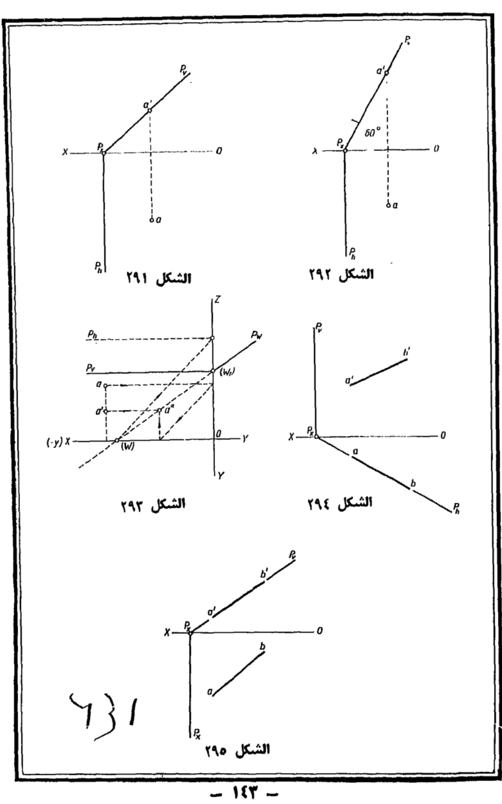
● **المثال ٨٨ :** ضم المستقيم AB في مستوي شاقولي P (الشكل ٢٩٤) .

الحل : من المعروف أن المسقط الأفقي لمستقيم ما واقع في مستوي شاقولي ينطبق على الأثر الأفقي للمستوي ، وبالعكس : الأثر الأفقي (p_h) للمستوي الحاوي على مستقيم ما ينطبق على المسقط الأفقي (ab) للمستقيم المفروض .

ومنه ـــ نمدد المسقط الأفقي (ab) للمستقيم حتى يتقاطع مع خط الأرض في النقطة p_x ، ثم نمرر منها الأثر الشاقولي (p_v) للمستوي ـــ بصورة عمودية على خط الأرض .

● **المثال ٨٩ :** ضم المستقيم AB في مستوي أمامي P (الشكل ٢٩٥) .

الحل : من المعلوم أن المسقط الشاقولي لمستقيم ما واقع في مستوي أمامي ينطبق على الأثر الشاقولي للمستوي ، وبالعكس : الأثر الشاقولي (p_v) للمستوي الحاوي على مستقيم ما سوف ينطبق على المسقط الشاقولي ($a'b'$) للمستقيم المفروض. لذلك نمدد المسقط الشاقولي ($a'b'$) للمستقيم حتى يتقاطع مع خط الأرض في النقطة p_x ثم نرسم منها الأثر الأفقي (p_h) للمستوي ـ عمودياً على خط الأرض .



الشكل ٢٩١

الشكل ٢٩٢

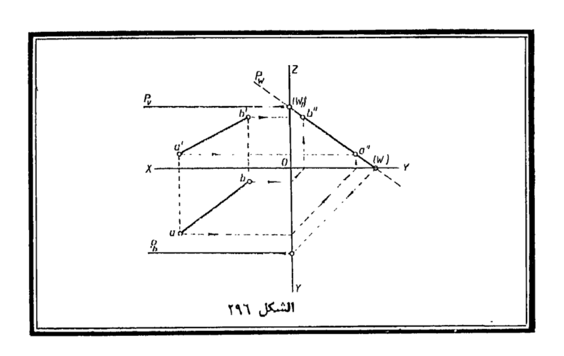
الشكل ٢٩٣

الشكل ٢٩٤

الشكل ٢٩٥

● **المثال ٩٠ :** ضم المستقيم AB في مستوي P يوازي خط الأرض (الشكل ٢٩٦).

الحل : من المعروف أن المسقط الجنبي لمستقيم ما واقع في مستوي يوازي خـــط الأرض ينطبق على الأثر الجنبي للمستوي . وعلى العكس : الأثر الجنبي (p_w) للمستوي الحـاوي على مستقيم ما ينطبق على المسقط الجنبي (a″b″) للمستقيم المفروض . ومنه – نوجد المسقط الجنبي (a″b″) للمستقيم ثم نمدده فيتقاطع مع المحورين oy وoz في النقطتين w و w_1 . بعد ذلك نرسم الأثر الأفقي (p_h) والأثر الشاقولي (p_v) للمستوي بصورة موازية لخط الأرض (انظر المخطط) .



الشكل ٢٩٦

ملاحظة : فيما يلي نبين حل هذه المسألة بدون استعمال مستوي موازي لخط الأرض .

نتيجة : من مستقيم ما يمكن أن نمرر : مستوي شاقولي وحيد ، مستوي أمامي وحيد ، مستوي وحيد يوازي خط الأرض (لماذا ؟) .

● **المثال ٩١ :** ضم المستقيم AB في المستوي P الكيفي إذا علمت نقطة إلتقاء أثري المستوي p_x (الشكل ٢٩٧) .

الحل : من المعروف أن أثري المستقيم الواقع في المستوي يتوضعان على أثري المستوي ، وعلى العكس أثرا المستوي الحاوي على مستقيم يجب أن يمرا من الأثرين الموافقين للمستقيم .

لنوجد الأثر (v,v′) للمستقيم ثم نرسم الأثر الشاقولي (p_v) للمستوي من النقطتين p_x و v′ والأثر الأفقي (p_h) للمستوي من النقطة p_x – موازياً للمسقط الأفقي (ab) للمستقيم (لماذا ؟) .

● **المثال ٩٢ :** ضم المستقيم AB في مستوي كيفي P (الشكل ٢٩٨) .

الحل : نوجد الأثر (h،h′) للمستقيم ونأخذ على خط الأرض نقطة ما (لماذا ؟) p_x ثم نرسم أثري المستوي : الأفقي (p_h) – من النقطة p_x و h والشاقولي (p_v) – من النقطة p_x – موازياً للمسقط الشاقولي (a′ b′) للمستقيم (لماذا ؟) .

● **المثال ٩٣ :** ارسم أثري مستوي كيفي P يمر من النقطة A إذا علمت نقطة إلتقاء أثري ذلك المستوي p_x (الشكل ٢٩٩ و ٣٠٠) .

الحل : ١ – باستعمال مستقيم أفقي في المستوي . نرسم مسقطي مستقيم أفقي ما من مسقطي النقطة (a،a′) ، ثم نوجد أثره (v,v′) . نرسم الأثر الشاقولي (p_v) للمستوي من النقطتين p_x و v′ ، والأثر الأفقي (p_h) – من النقطة p_x – موازياً للمسقط الأفقي للمستقيم الأفقي (لماذا ؟) .

٢ ــ باستعمال مستقيم جبهي في المستوي . نرسم مسقطي مستقيم جبهي ما من مسقطي النقطة المعطاة (a،a′) ، ثم نوجد الأثر (h،h′) . نرسم الأثر الافقي (p_h) للمستوي من النقطتين p_x و h والأثر الشاقولي (p_v) ــ من النقطة p_x ــ موازياً للمسقط الشاقولي للمستقيم الجبهي (لماذا ؟) .

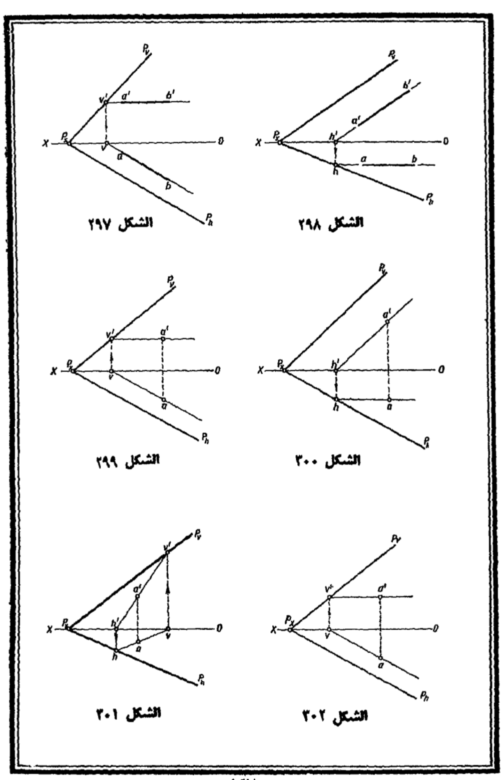
ملاحظة : يمكننا أن نمرر أي مستقيم من النقطة A .

● **المثال ٩٤ :** ارسم أثري مستوي كيفي P يمر من النقطة A (الشكل ٣٠١ ــ ٣٠٣) .

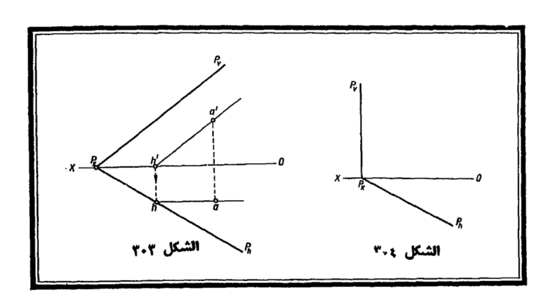
الحل : ١ ــ نرسم مسقطي مستقيم ما من مسقطي النقطة (a,a′) ثم نوجد أثريه (h،h′) و (v،v′) بما أنه يمكن من مستقيم أن نمرر عدة مستويات لذلك نأخذ على خط الأرض نقطة ما p_x ثم نرسم أثري المستوي : الأفقي (p_h) ــ من النقطتين p_x و h والشاقولي (p_v) ــ من النقطتين p_x و v′ .

٢ ــ نستعمل مستقيماً أفقياً في المستوي . نرسم مسقطي مستقيم أفقي ما من مسقطي النقطة (a،a′) ثم نوجد الأثر (v,v′) . نأخذ على خط الأرض نقطة ما p_x ونرسم أثري المستوي : الشاقولي (p_v) ــ من النقطتين p_x و v′ والأفقي (p_h) ــ من النقطة p_x ــ موازياً للمسقط الأفقي للمستقيم الأفقي (لماذا ؟) .

٣ ــ نستعمل مستقيماً جبهياً في المستوي . نرسم مسقطي مستقيم جبهي ما من مسقطي النقطة (a،a′) ثم نوجد الأثر (h,h′) . نأخذ على خط الأرض نقطة ما p_x ونرسم أثري المستوي : الأفقي (p_h) من النقطتين p_x و h والشاقولي


الشكل ٢٩٧
الشكل ٢٩٨
الشكل ٢٩٩
الشكل ٣٠٠
الشكل ٣٠١
الشكل ٣٠٢

p_v) — من النقطة p_x — موازياً للمسقط الشاقولي للمستقيم الجبهي (لماذا ؟) .



الشكل ٣٠٣

الشكل ٣٠٤

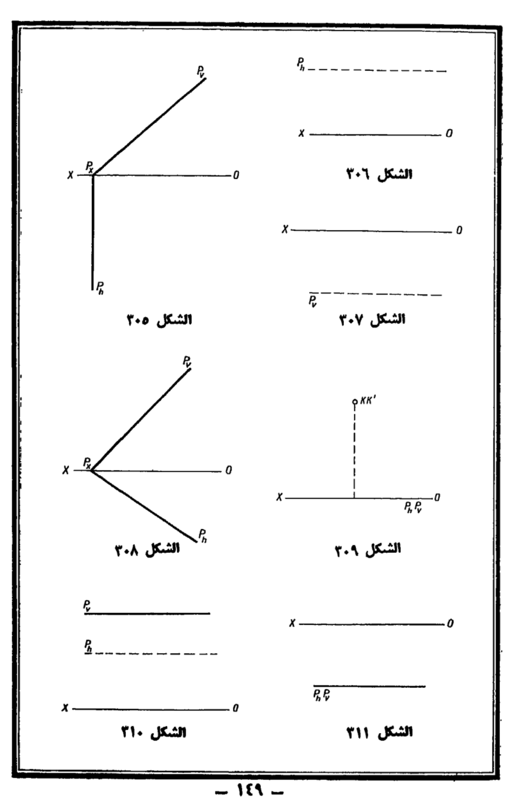
مسائل

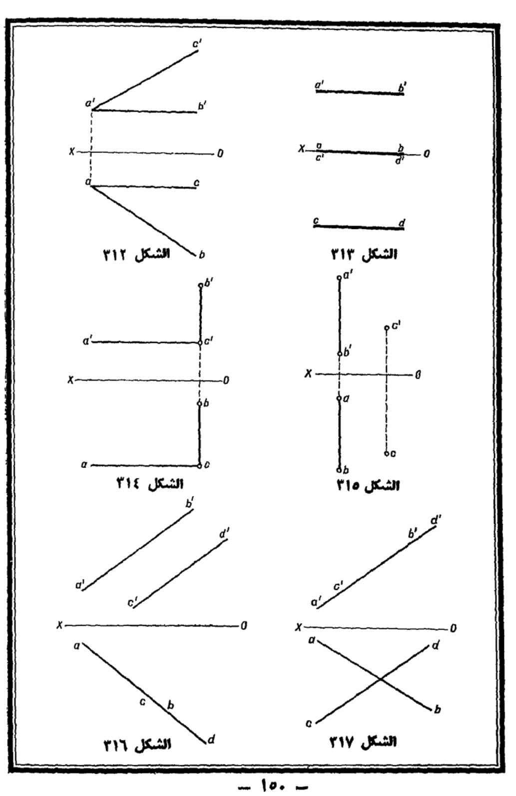
١٩٩ — عدد المستقيمات التي يمكن رسمها في مستوي P (الشكل ٣٠٤ — ٣١١) .

٢٠٠ — أوجد أثري مستوي مفروض معين : بمستقيمين متقاطعين ، بمستقيمين متوازيين ، بمستقيم ونقطة (الشكل ٣١٢ — ٣١٧) .

٢٠١ — أوجد الأثر الجنبي للمستوي P (الشكل ٣١٨ — ٣٢٧) .

٢٠٢ — ارسم في المستوي P مستقيماً مـا يمر من الأرباع المبينـة (الشكل ٣٢٨ — ٣٣٢) .


P_v
X
P_x
0
P_h
الشكل ٣٠٥
P_h
X
0
الشكل ٣٠٦
X
0
P_v
الشكل ٣٠٧
P_v
X
P_x
0
P_h
الشكل ٣٠٨
KK'
X
0
P_h P_v
الشكل ٣٠٩
P_v
P_h
X
0
الشكل ٣١٠
X
0
P_h P_v
الشكل ٣١١



الشكل ٣١٢

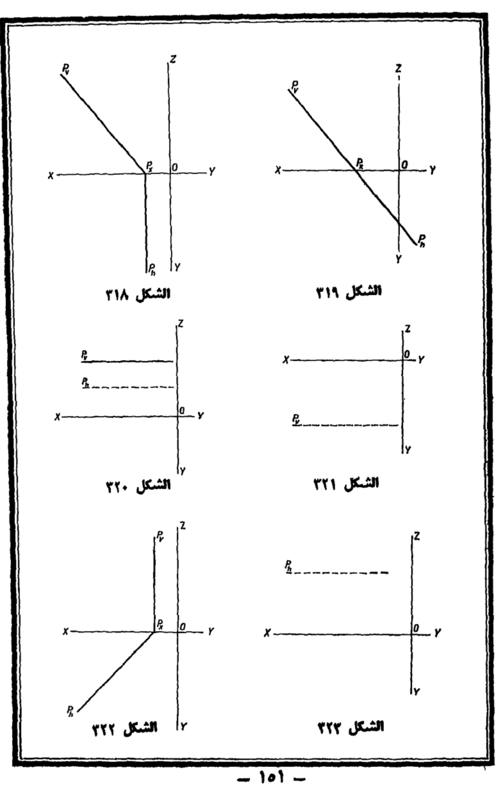
الشكل ٣١٣

الشكل ٣١٤

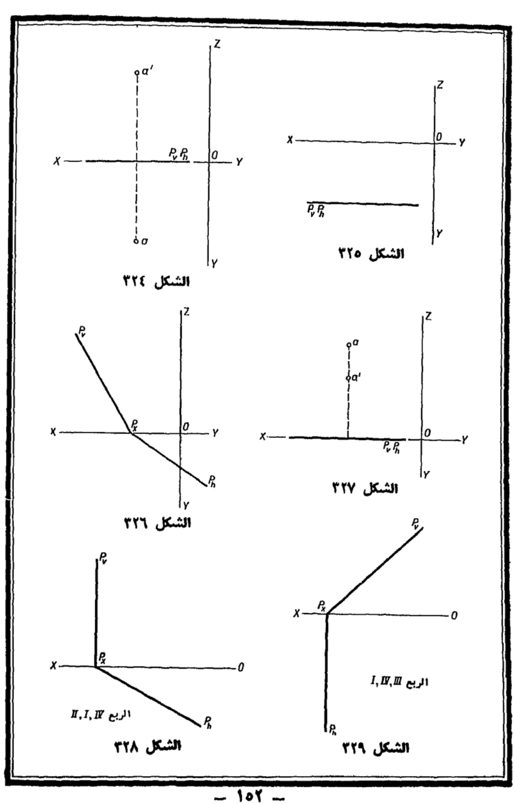
الشكل ٣١٥

الشكل ٣١٦

الشكل ٣١٧



Z
Pv
Px
0
X
Y
Ph
Y
الشكل ٣١٨
Z
Pv
Px
0
X
Y
Ph
Y
الشكل ٣١٩
Z
Pv
Ph
0
X
Y
Y
الشكل ٣٢٠
Z
0
X
Y
Pv
Y
الشكل ٣٢١
Z
Pv
Px
0
X
Y
Ph
Y
الشكل ٣٢٢
Z
Ph
0
X
Y
Y
الشكل ٣٢٣



الشكل ٣٢٤

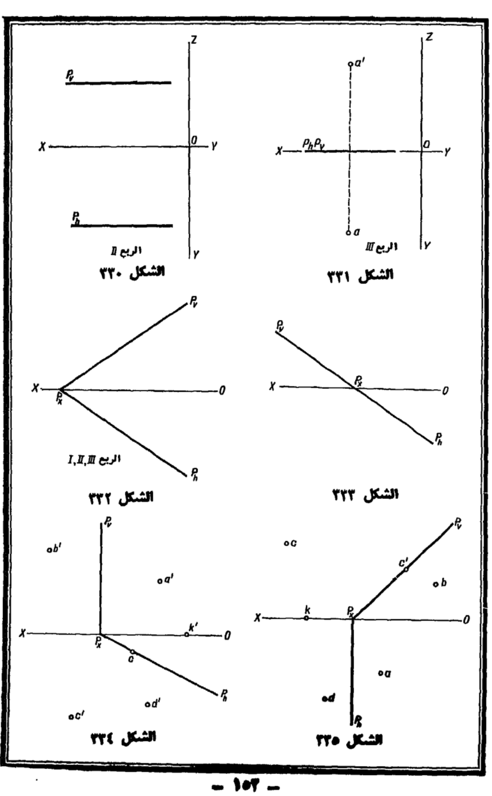
الشكل ٣٢٥

الشكل ٣٢٦

الشكل ٣٢٧

الشكل ٣٢٨

الشكل ٣٢٩



الشكل ٣٣٠

الشكل ٣٣١

الشكل ٣٣٢

الشكل ٣٣٣

الشكل ٣٣٤

الشكل ٣٣٥

٢٠٣ – ارسم في المستوي P المحل الهندسي للنقاط التي تبعد عن مستوي الإسقاط الأفقي بمقدار 15 mm (الشكل ٣٣٢ و٣٣٣) .

٢٥٤ – ارسم في المستوي P المحل الهندسي للنقاط التي تبعد عن مستوي الإسقاط الشاقولي بمقدار 15 mm (الشكل ٣٣٢ و ٣٣٣) .

٢٠٥ – أوجد في المستوي P نقطة A ذات إحداثيات مفروضة (الشكل ٣٣٢ و٣٣٣).

y	15	−15	−20	−15	25	20
z	25	25	20	−25	−15	−20

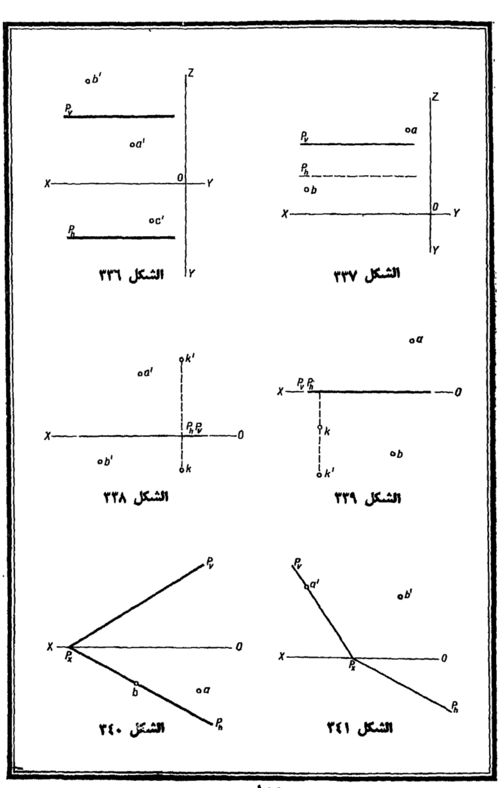
٢٠٦ – عيّن المساقط الناقصة للنقاط الواقعة في المستوي P (الشكل ٣٣٤ – ٣٤١) .

٢٠٧ – لدينا المسقط الأفقي للمثلث ABC الواقع في المستوي P . عيّن مسقطه الشاقولي (أو بالعكس) ، بدون استعمال مستقيمات رئيسية في المستوي ، وباستعمال مستقيمات أفقية وجبهية في المستوي (الشكل ٣٤٢ و ٣٤٣) .

٢٠٨ – لدينا أحد مسقطي المثلث ABC الواقع في المستوي الموازي لخط الأرض . عيّن مسقطه الآخر : بدون استعمال مستوي الإسقاط الجنبي ، باستعمال مستوي الإسقاط الجنبي (الشكل ٣٤٤ و ٣٤٥) .

٢٠٩ – عيّن الأثر الناقص للمستوي P المعطى بأثر واحد ونقطة واقعة في هذا المستوي . (الشكل ٣٤٦ – ٣٥٥) .

٢١٠ – ارسم أثري المستوي P المار من النقطة A إذا علمت نقطة التقاء هذين الاثرين وأن المستوي :



الشكل ٣٣٦

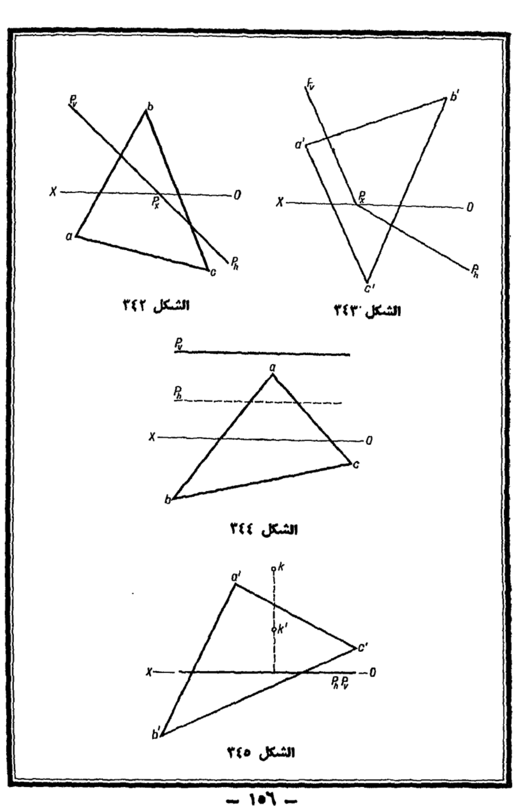
الشكل ٣٣٧

الشكل ٣٣٨

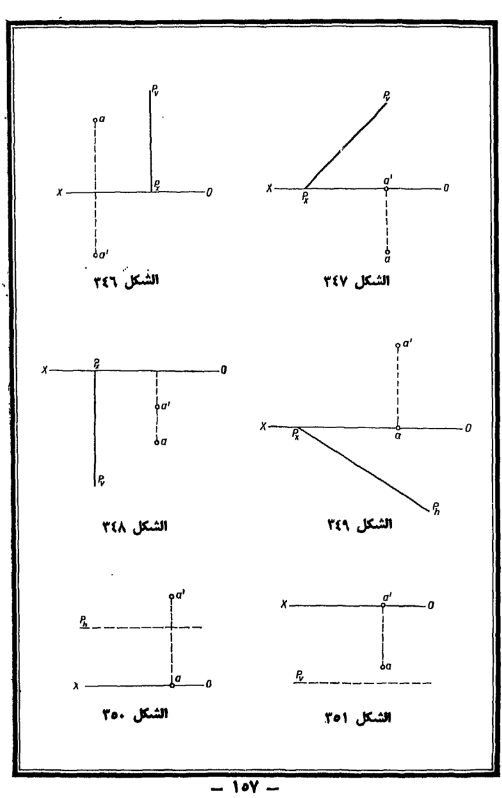
الشكل ٣٣٩

الشكل ٣٤٠

الشكل ٣٤١



P_v
b
X
O
P_x
a
P_h
c
الشكل ٣٤٢
P_v
b'
a'
P_x
X
O
P_h
c'
الشكل ٣٤٣
P_v
a
P_h
X
O
c
b
الشكل ٣٤٤
k
a'
k'
c'
X
O
P_h P_v
b'
الشكل ٣٤٥



الشكل ٣٤٦

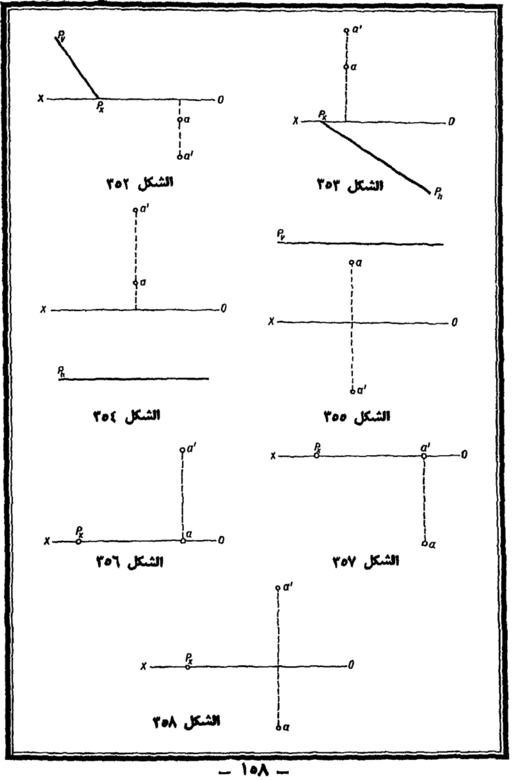
الشكل ٣٤٧

الشكل ٣٤٨

الشكل ٣٤٩

الشكل ٣٥٠

الشكل ٣٥١



الشكل ٣٥٢

الشكل ٣٥٣

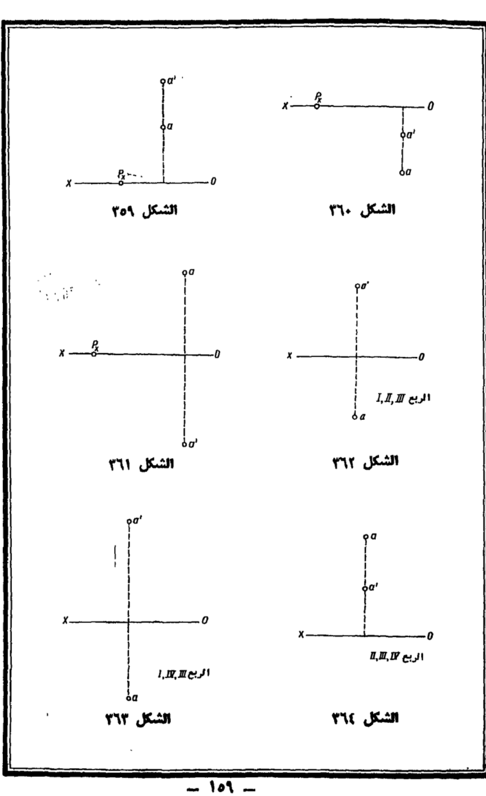
الشكل ٣٥٤

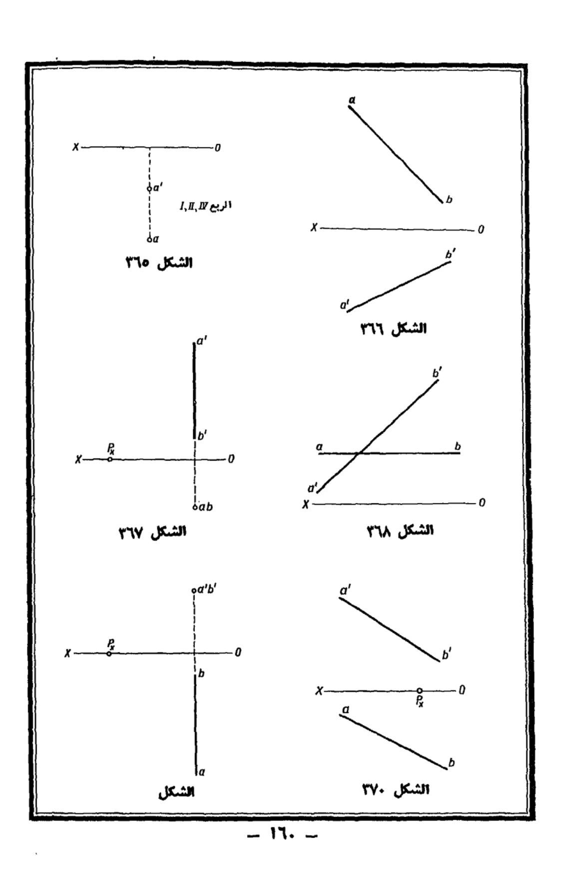
الشكل ٣٥٥

الشكل ٣٥٦

الشكل ٣٥٧

الشكل ٣٥٨


a'
a
P_x
X
O
الشكل ٣٥٩
P_x
X
O
a'
a
الشكل ٣٦٠
a
P_x
X
O
a'
الشكل ٣٦١
a'
X
O
الربع I, II, III
a
الشكل ٣٦٢
a'
X
O
الربع I, IV, III
a
الشكل ٣٦٣
a
a'
X
O
الربع II, III, IV
الشكل ٣٦٤



الشكل ٣٦٥

الشكل ٣٦٦

الشكل ٣٦٧

الشكل ٣٦٨

الشكل

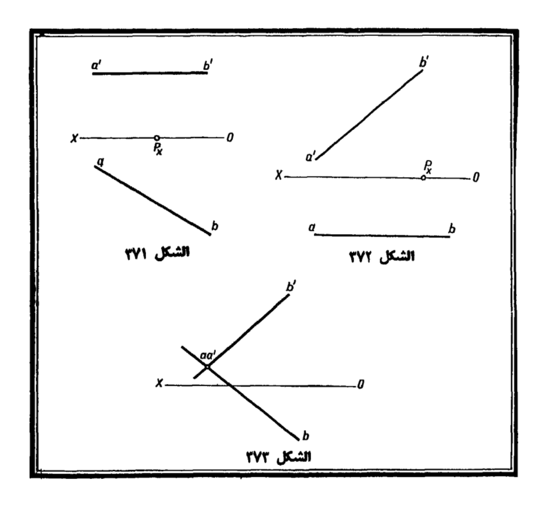
الشكل ٣٧٠

١ – كيفي (الشكل ٣٥٦ – ٣٥٩) .

٢ – شاقولي (الشكل ٣٦٠) .

٣ – أمامي (الشكل ٣٦١) .

٢١١ – ارسم أثري مستوي P يوازي خط الأرض ويمر من النقطة A عبر الأرباع المبينة (الشكل ٣٦٢ – ٣٦٥) . « المسألة غير معينة » .



الشكل ٣٧١

الشكل ٣٧٢

الشكل ٣٧٣

٢١٢ – مرور من النقطة (20 ، 30- ، 20) A مستوياً شاقولياً P يصنع مع مستوي الإسقاط الشاقولي زاوية 45° .

٢١٣ – مرور من النقطة (20 ، 20 – ، 30) A مستوياً أمامياً P يصنع مع مستوي الإسقاط الأفقي زاوية 30° .

٢١٤ – مرور من النقطة (30 ، 20 ، – 20) A مستوياً يوازي خط الأرض ويصنع مع مستوي الإسقاط الأفقي زاوية 30° ، ومع مستوي الإسقاط الشاقولي زاوية 45°

٢١٥ – ارسم أثري مستوي P يمر من المستقيم AB إذا كان المستوي :

١ – شاقولياً (الشكل ٣٦٦ و ٣٦٧) .

٢ – أمامياً (الشكل ٣٦٨ و ٣٦٩) .

٣ – كيفياً (الشكل ٣٧٠ – ٣٧٢) .

٢١٦ – ارسم أثري مستوي يوازي خط الأرض ويمر من المستقيم AB : باستعمال مستوي الإسقاط الجنبي وبدون إستعمال مستوي الإسقاط الجنبي (الشكل ٣٧٣) .

البحث الثالث عشر

تقاطع المستويات المعينة بآثارها

يتقاطع مستويان وفق خط مستقيم . يتعين المستقيم في الفراغ إذا عرفت نقطة منه وإتجاهه أو نقطتان منه .

وعليه لإيجاد الفصل المشترك لمستويين يتطلب إيجاد نقطتين مشتركتين

لكلا المستويين أو إيجاد نقطة مع معرفة إتجاه الفصل المشترك .

في الحالة الخاصة يمكن استخدام أثري المستقيم كنقاط لتعيينه .

إن أثري الفصل المشترك لمستويين يقعان عند تقاطع الآثار المتماثلة للمستويين أي :

الأثر الأفقي للفصل المشترك يقع عند تقاطع الأثرين الأفقيين للمستويين .

الأثر الشاقولي للفصل المشترك يقع عند تقاطع الأثرين الشاقوليين للمستويين .

الأثر الجنبي للفصل المشترك يقع عند تقاطع الأثرين الجنبيين للمستويين .

حسب وضعية المستويين المتقاطعين في الفراغ يمكن أن يكون للفصل المشترك في المجموعة H و V : أثران أفقي وشاقولي ، أفقي وحيد ، شاقولي وحيد ، بدون أثر أفقي وأثر شاقولي .

إذا كان للفصل المشترك أثران أفقي وشاقولي فهو أما أن يكون مستقيماً كيفياً ، أو مستقيماً جنبياً أو مستقيماً قاطعاً لخط الأرض

إذا كان للفصل المشترك أثر أفقي وحيد فهذا المستقيم سيوازي مستوي الإسقاط الشاقولي (جبهي) ، وفي الحالة الخاصة يمكن أن يكون عمودياً على مستوي الإسقاط الأفقي.

إذا كان للفصل المشترك أثر شاقولي وحيد فهذا المستقيم سيوازي مستوي الإسقاط الأفقي (أفقي) ، وفي الحالة الخاصة يمكن أن يكون عمودياً على مستوي الإسقاط الشاقولي .

إذا كان للفصل المشترك أثر جنبي وحيد فهذا المستقيم سيوازي خط الأرض .

في تلك الحالات عندما يكون الفصل المشترك إسقاطي أي عمودي على أحد مستويات الإسقاط يجب أن لاننسى أن أحد مساقط المستقيم سينطبق على أثر المستقيم أي :

إذا كان الفصل المشترك عمودياً على المستوي H فمسقطه الأفقي سينطبق على

الأثر الأفقي للمستقيم .

إذا كان الفصل المشترك عمودياً على المستوي V فمسقطه الشاقولي سينطبق على الأثر الشاقولي للمستقيم .

إذا كان الفصل المشترك عمودياً على المستوي W (موازياً لخط الأرض) فمسقطه الجنبي سينطبق على الأثر الجنبي للمستقيم .

إذا كان الأثران المتماثلان للمستويين (الافقيان أو الشاقوليان،أو الأفقيان والشاقوليان) لا يتقاطعان في حدود الشكل فعندها يجب أن نوجد نقطة أو نقطتين ما تابعين للفصل المشترك للمستويين .

تعين النقطة من الفصل المشترك باستعمال مستوي مساعد .

أمثلة

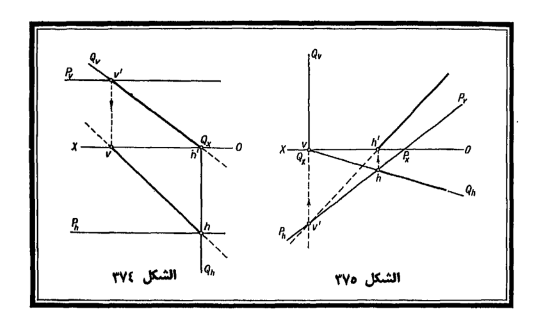
● **المثال ٩٥ :** أوجد الفصل المشترك للمستويين P و Q (الشكل ٣٧٤) .

الحل : يتقاطع المستويان P و Q وفق مستقيم كيفي يمر من النقطتين (h,h') و (v,v') الواقعتين عند تقاطع الأثرين الأفقيين والشاقوليين للمستويين . نوسم مسقطي المستقيم المطلوب : الأفقي – من النقطتين h و v والشاقولي – من النقطتين h' و v' وهذاينطبق على الأثر الشاقولي(Q_v)للمستوي Q (لماذا ؟) . المستقيم يمر من الربع الثاني والأول والرابع (لماذا ؟) .

● **المثال ٩٦ :** أوجد الفصل المشترك للمستويين P و Q (شكل ٣٧٥) .

الحل : يتقاطع المستويان P و Q وفق مستقيم كيفي يمر من النقطتين (h,h') , (v,v') الواقعتين عند تقاطع الأثرين الأفقيين والشاقوليين للمستويين. لنرسم مسقطي المستقيم المطلوب:

الأفقي – من النقطتين vوh الذي ينطبق على الأثر الأفقي (Q_h) للمستوي Q (لماذا ؟) والشاقولي – من النقطتين 'v'وh . المستقيم يمر من الربع الأول والرابع والثالث (لماذا ؟) .



الشكل ٣٧٤ الشكل ٣٧٥

● **المثال ٩٧ :** أوجد الفصل المشترك للمستويين P و Q (الشكل ٣٧٦) .

الحل : يتقاطع المستويان P و Q وفق مستقيم جنبي يمر من النقطتين ('h,h)و ('v,v) الواقعتين عند تقاطع الأثرين الأفقيين والشاقوليين للمستوي والمتوضعتين على عمود واحد على خط الأرض . لنرسم مسقطي المستقيم المطلوب : الأفقي – من النقطتين h و v والشاقولي – من النقطتين 'h و 'v . لنرسم أيضاً مسقطه الجنبي ("h"v) .
بيّن من أي الأرباع يمر المستقيم وماذا يعني إنطباق أثريه على المخطط .

● **المثال ٩٨ :** أوجد الفصل المشترك للمستويين P و Q (الشكل ٣٧٧)

الحل : يتقاطع المستويان P و Q وفق مستقيم أفقي يمر من النقطة ـ الأثر (v،v′) الواقعة عند تقاطع الأثرين الشاقوليين للمستويين . لنرسم مسقطي المستقيم المطلوب : الشاقولي ــ من النقطة v′ ــ موازياً لخط الأرض وهذا ينطبق على الأثر الشاقولي (Q_v) للمستوي Q (لماذا ؟) ، والأفقي ــ من النقطة v ــ موازياً للأثر الأفقي (P_h) للمستوي P . المستقيم يمر من الربع الأول والثاني (لماذا ؟) .

نتيجة : يتقاطع المستوي الكيفي مع المستوي الموازي للمستوي H وفق مستقيم أفقي.

● **المثال ٩٩ :** أوجد الفصل المشترك للمستويين P و Q (الشكل ٣٧٨) .

الحل : انظر حل المسألة السابقة .

نتيجة : إذا كان المستويان كيفيين ، وكان أثراهما الشاقوليان متقاطعين ، وأثراهما الأفقيان متوازيين فيما بينهما فهما يتقاطعان وفق مستقيم أفقي .

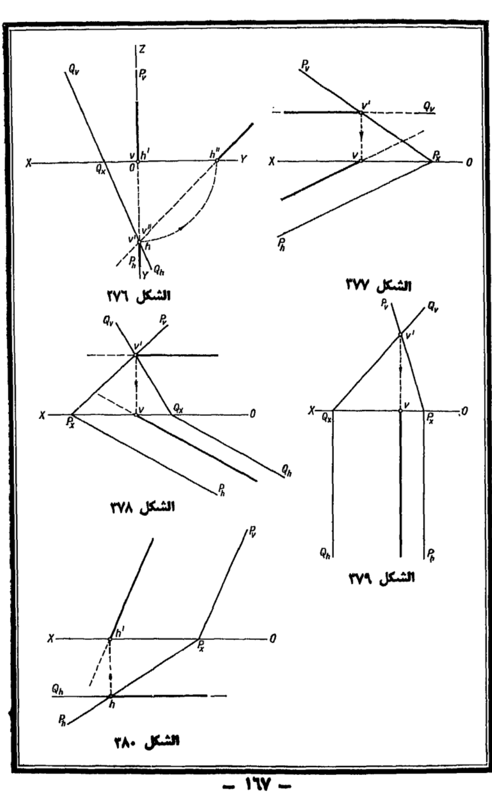
● **المثال ١٠٠ :** أوجد الفصل المشترك للمستويين P و Q (الشكل ٣٧٩) .

الحل : يتقـــاطع المستويان P و Q وفق مستقيم أفقي عمودي على مستوي الإسقاط الشاقولي (لماذا ؟) .

ينطبق المسقط الشاقولي للمستقيم المطلوب على النقطة v′ (لماذا ؟) ، أما مسقطه الأفقي فيمر من النقطة v وهو عمودي على خط الأرض . المستقيم يمر من الربع الأول والثاني (لماذا ؟) .

نتيجة : يتقاطع مستويان أماميان وفق مستقيم عمودي على مستوي الإسقاط الشاقولي أي وفق مستقيم أمامي .

● **المثال ١٠١ :** أوجد الفصل المشترك للمستويين P و Q (الشكل ٣٨٠) .



الشكل ٣٧٦

الشكل ٣٧٧

الشكل ٣٧٨

الشكل ٣٧٩

الشكل ٣٨٠

الحل : يتقاطع المستويان P و Q وفق مستقيم جبهي يمر من نقطة الأثر (h , h′) الواقعة عند تقاطع الأثرين الأفقيين للمستويين . لنرسم مسقطي المستقيم المطلوب : الأفقي من النقطة h يوازي خط الأرض وينطبق على الأثر الأفقي (Q_h) للمستوي Q (لماذا ؟) والشاقولي ـ من النقطة h′ موازياً للأثر الشاقولي (p_v) للمستوي P . المستقيم يمر من الربع الأول والرابع (لماذا ؟) .

نتيجة : المستوي الكيفي يتقاطع مع المستوي الموازي للمستوي v وفق مستقيم جبهي .

● **المثال ١٠٢ :** أوجد الفصل المشترك للمستويين P و Q (الشكل ٣٨١) .

الحل : أنظر حل المسألة السابقة .

نتيجة : المستويان الكيفيان اللذان يتقاطع أثراهما الأفقيان ويتوازى أثراهما الشاقوليان يتقاطعان وفق مستقيم جبهي .

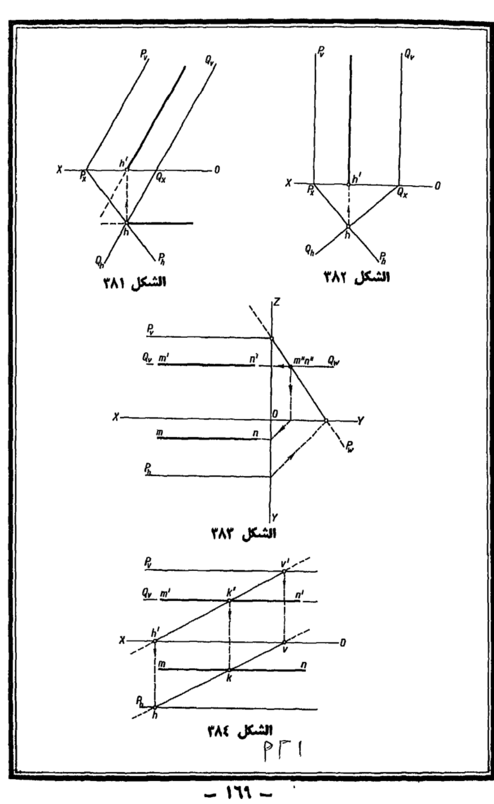
● **المثال ١٠٣ :** أوجد الفصل المشترك للمستويين P و Q (الشكل ٣٨٢) .

الحل : يتقاطع المستويان الشاقوليان P وQوفق مستقيم جبهي عمودي على مستوي الإسقاط الأفقي . المسقط الأفقي للمستقيم المطلوب ينطبق على النقطة h (لماذا ؟) أما مسقطه الشاقولي فيمر من النقطة h′ عمودياً على خط الأرض . المستقيم يمر من الربع الأول والرابع (لماذا ؟) .

نتيجة : يتقاطع المستويان الشاقوليان وفق مستقيم عمودي على مستوي الإسقاط الأفقي أي شاقولي .

● **المثال ١٠٤ :** أوجد الفصل المشترك للمستويين P و Q (الشكل ٣٨٣ و ٣٨٤).

الحل : يتقاطع المستويان P و Q وفق المستقيم MN الموازي لخط الأرض (لماذا ؟) .

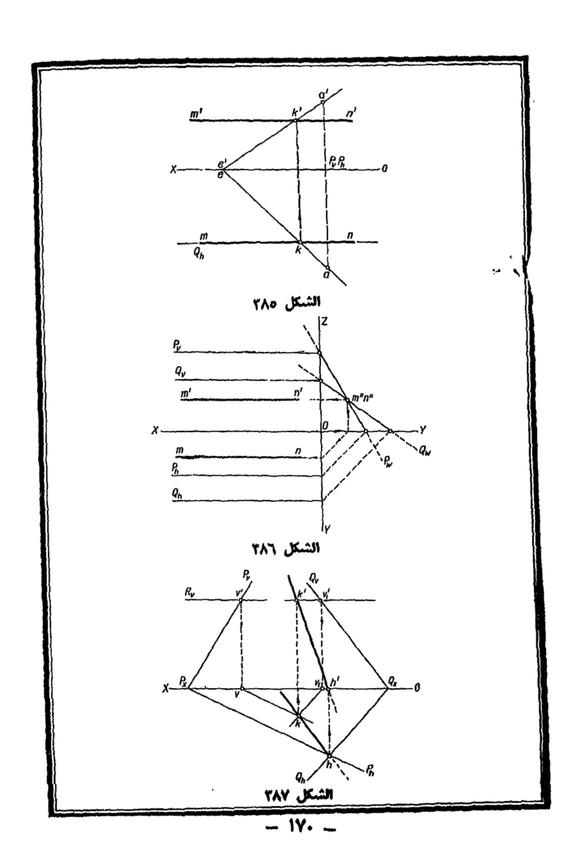


الشكل ٣٨١

الشكل ٣٨٢

الشكل ٣٨٣

الشكل ٣٨٤



الشكل ٣٨٥

الشكل ٣٨٦

الشكل ٣٨٧

الطريقة الأولى : ينطبق المسقط الجنبي (m″n″) للمستقيم المطلوب على الأثر الجنبي لهذا المستقيم الذي يقع كما هو معلوم عند تقاطع الأثرين الجنبيين (P_w و Q_w) للمستويين . نعين الأثرين الجنبيين للمستويين المفروضين . نقطة تقاطعهما تحدد المسقط الجنبي (m″n″) للمستقيم المطلوب .

بعد ذلك نوجد المسقطين الأفقي (m n) والشاقولي (m′n′) اللذين يجب أن يكونا موازيين لخط الأرض (لماذا ؟) .

الطريقة الثانية : بما أن المستقيم المطلوب MN يقع في المستوي Q فمسقطه الشاقولي (m′n′) ينطبق على الأثر الشاقولي (Q_v) لهذا المستوي (لماذا ؟). وبمعرفة المسقط الشاقولي (m′n′) للمستقيم يمكن أن نجد مسقطه الافقي (m n) بدون إستعمال مستوي الإسقاط الجنبي . لهذا نأخذ نقطة ما k′ على المستقيم m′n′ ونوجد المسقط الأفقي (k) للنقطة ، علماً بأن النقطة (k,k′) تقع في المستوي P . من النقطة k نرسم المسقط الأفقي (m n) للمستقيم المطلوب ـ موازياً لخط الأرض .

● **المثال ١٠٥ :** أوجد الفصل المشترك للمستويين P و Q (الشكل ٣٨٥) .

الحل : الطريقة الاولى : انظر حل المسألة السابقة .

الطريقة الثانية : بما أن المستقيم المطلوب يقع في المستوي Q فمسقطه الأفقي (m n) ينطبق على الأثر الأفقي (Q_h) لهذا المستوي (لماذا ؟) وبمعرفة المسقط الأفقي (m n) للمستقيم يمكن أن نوجد مسقطه الشاقولي (m′ n′) بدون استعمال مستوي الإسقاط الجنبي . لهذا نأخذ على المستقيم mn نقطة k ونوجد المسقط الشاقولي (k′) للنقطة علماً بأن النقطة (k ، k′) تقع في المستوي P .

من النقطـــة 'k نرسم المسقط الشاقولي ('m'n) للمستقيم المطلوب — موازياً لخط الأرض .

● **المثال ١٠٦ :** أوجد الفصل المشترك للمستويين P و Q (الشكل ٣٨٦) .

الحل : يتقاطع المستويان P و Q وفق المستقيم MN الموازي لخط الأرض (لماذا؟) . نوجد مسقطه الجنبي (″m″n) عند تقاطع الأثرين الجنبيين للمستويين ، بعد ذلك وبمساعدة المسقط الجنبي للمستقيم نعين مسقطه الأفقي (mn) والشاقولي ('m'n) اللذين يوازيان خط الأرض .

● **المثال ١٠٧ :** أوجد الفصل المشترك للمستويين P و Q (الشكل ٣٨٧) .

الحل : يتقاطع المستويان P و Q وفق مستقيم كيفي يمر من نقطة الأثر ('h،h) لتقاطع الأثرين الأفقيين للمستويين . بما أن نقطة الأثر ('v،v) لتقاطع الأثرين الشاقوليين للمستويين بعيدة نظراً لأن الأثرين لا يتقاطعان في حدود الشكل فعوضاً عن النقطة ('v,v) يجب أن نوجد نقطة أخرى من الفصل المشترك .

لهذا نقوم بما يلي : نرسم مستوياً مساعداً R مثلاً موازيـــاً للمستوي H وكما هو معروف سيقطع كلا من المستويين وفق مستقيم أفقي . عند تقـاطعهما نحصل على نقطة مساعدة ('k,k) مشتركة بين المستويين .

بإيجاد النقطة الثانية ('k،k) من المستقيم نرسم مسقطيه: الأفقي - من النقطتين h و k والشاقولي — من النقطتين 'h و'k .

من أي الأرباع يمر الفصل المشترك ؟

ملاحظة : عند الضرورة يمكننا باستعمال الطريقة المذكورة آنفاً تعيين نقطتين ما أخريتين من الفصل المشترك وذلك برسم مستويين مساعدين على التوالي من الأسهل أخذهما موازيين للمستوي H أو V (أفقيين أو جبهيين) .

● **المثال ١٠٨ :** اوجد الفصل المشترك للمستويين P و Q (الشكل ٣٨٨) .

الحل : يتقاطع المستويان P و Q وفق مستقيم يقطع خط الأرض في النقطتين (h،h′) و (v،v′) المنطبقتين على النقطـــة (m،m′) الواقعتين عند تقاطع الأثرين الأفقيين والأثرين الشاقوليين للمستويين . من المعروف أن النقطتـــين الأثرين (h، ، و(v،v′) لا تعينان مستقيماً لإنطباقهما مما يلزمنا بتعيين نقطـة أخرى من هذا المستقيم مشتركة بين المستويين .

النقطة (a،a′) معطاة في المستوي P . لنتحقق قبل كل شيء ألا تقع النقطة (a،a′) في المستوي Q أيضاً ؟ ننجز التحقيق مثلًا بمساعـــدة مستقيم أفقي . النقطة (a،a′) تقع في الحقيقة في المستوي Q أي أنها مشتركة بين المستويين .

لنرسم مساقط المستقيم المطلوب : الشاقولي — من النقطتين m′ و a′ والأفقي — من النقطتين m و a .

المستقيم يمر من الربع الأول والثالث (لماذا ؟) .

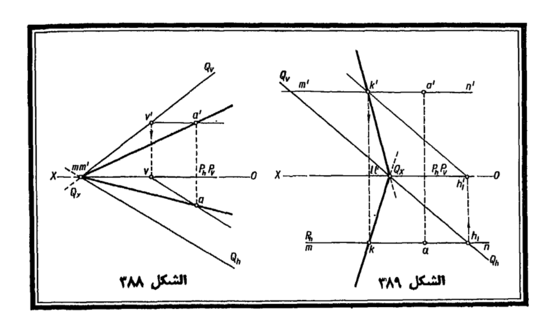
● **المثال ١٠٩ :** أوجد الفصل المشترك للمستويين P و Q (الشكل ٣٨٩) .

الحل : يتقاطع المستويان P و Q وفق مستقيم يمر من النقطة (l،l') والتي تنطبق معهاالنقطتان(h،h′) و (v،v′) لتقاطع الآثار المتوافقة للمستويين . النقطة (a،a′) تقع حسب الفرض في المستوي P ، ولا تقع في المستوي Q إذ يمكن أن نقتنع بهذا مثلًا بمساعدة مستقيم جبهي . بناء عليه لتعيين المستقيم يجب أن نوجد نقطـة أخرى . نرسم مستوياً مساعداً R موازياً لمستوي الإسقاط الشاقولي ومارًا من النقطة (a،a′) ، فأثره الأفقي (R_h) يمر من النقطة a — موازياً لخط الأرض . المستوي P يقطـــ المستوي P وفق مستقيم (mn،m′n′) موازٍ لخط الأرض ومارٍ من ال

أما المستوي Q — فوفق مستقيم جبهي مارٍ من النقطة (h_1' ،h_1)

عند تقاطع المستقيم MN والمستقيم الجبهي نجد ال

يجب أن يمر الفصل المشـــترك . لنرسم مسقطي المستقيم المطلوب : الأفقي ــ من النقطتين l و k والشاقولي ــ من النقطتين l' و k' .

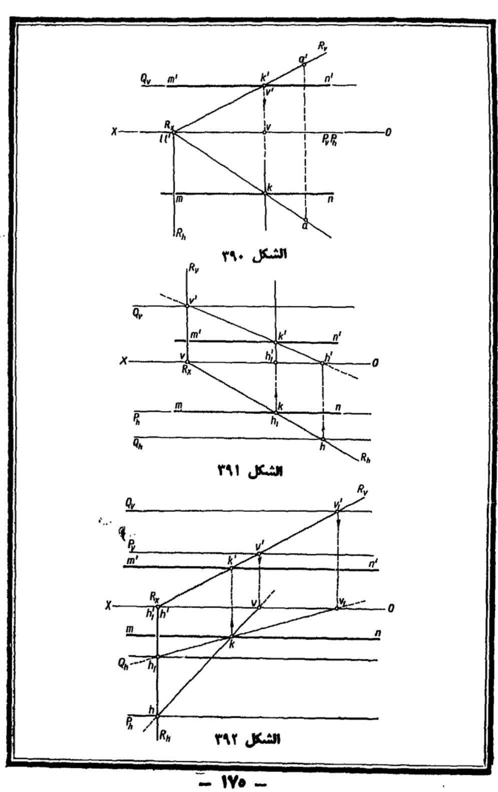


الشكل ٣٨٨ — الشكل ٣٨٩

● **المثال ١١٠ :** أوجد الفصل المشترك للمستويين P و Q بدون استخـدام مستوي الإسقاط الجنبي (الشكل ٣٩٠) .

الحل : يتقاطـــع المستويان P و Q وفق مستقيم MN موازٍ لخط الأرض (لماذا ؟) .

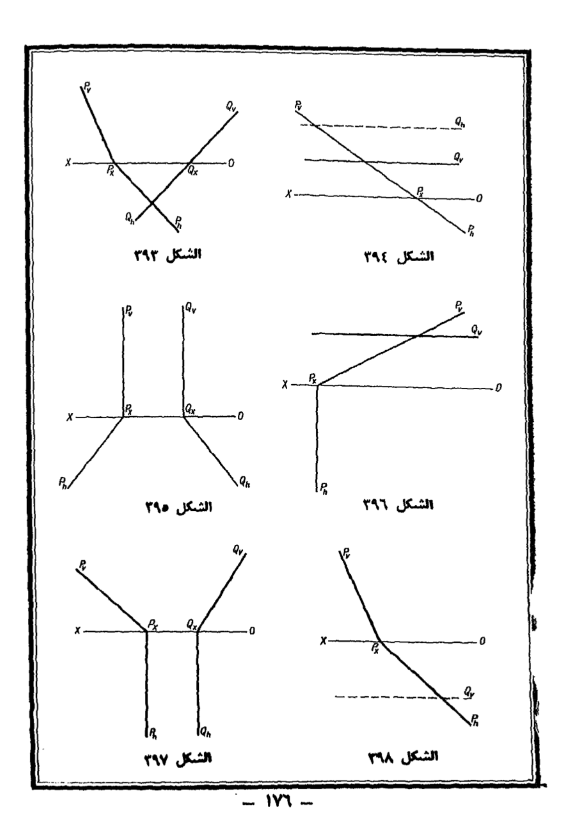
بمعرفة إتجاه المستقيم المطلوب يكفينا تعيين نقطة واحدة منه . لهذا نرسم مستوياً مساعداً أمامياً R ماراً من النقطة (a,a') . المستوي المساعد R يقطع المستوي P وفق المستقيم ($al,a'l'$) أما المستوي Q ــ فوفق مستقيم أمامي مار من النقطة (v،v') ، وعند تقاطعهما نحصل على النقطة (k,k') . نرسم المسقطين (mn,m'n') المستقيم المطلوب من المساقط الموافقة للنقطة (k،k') و بصورة موازية لخط الأرض . كما توقعنا المسقط



الشكل ٣٩٠

الشكل ٣٩١

الشكل ٣٩٢



Pv
Qv
X
O
Px
Qx
Qh
Ph
الشكل ٣٩٣
Pv
Qh
Qv
X
Px
O
Ph
الشكل ٣٩٤
Pv
Qv
X
Px
Qx
O
Ph
Qh
الشكل ٣٩٥
Pv
Qv
X
Px
O
Ph
الشكل ٣٩٦
Pv
Qv
X
Px
Qx
O
Ph
Qh
الشكل ٣٩٧
Pv
X
O
Px
Qv
Ph
الشكل ٣٩٨

الشاقولي (m'n') للمستقيم المطلوب ينطبق على الأثر الشاقولي (Q_v) للمستوي Q (لماذا ؟) .

● **المثال ١١١ :** أوجد الفصل المشترك للمستويين P و Q بدون استعمال مستوي الإسقاط الجنبي (الشكل ٣٩١) .

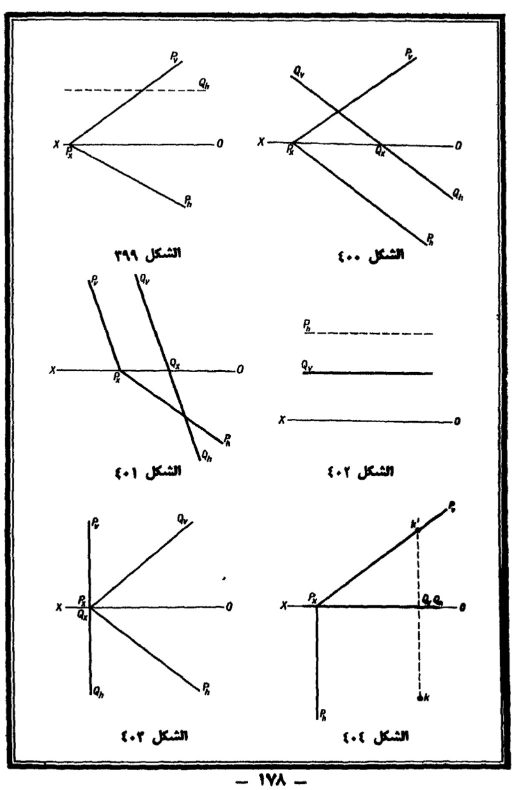
الحل : يتقاطع المستويان P و Q وفق المستقيم MN الموازي لخط الأرض (لماذا ؟) .

بمعرفة إتجاه المستقيم المطلوب يلزمنا تعيين نقطة واحدة منه لهذا ندخل مستوياً شاقولياً R . المستوي R يقطع المستوي Q وفق المستقيم (hv , h'v') أما المستوي P فوفق مستقيم شاقولي مار من النقطة (h_1،h_1') وعند تقاطعهما نحصل على النقطة (k ، k') . نرسم مسقطي المستقيم المطلوب (mn،m'n') ـ بصورة موازية لخط الأرض ـ من مسقطي النقطة الحاصلة (k , k') .

● **المثال ١١٢ :** أوجد الفصل المشترك للمستويين P و Q بدون إستعمال مستوي الإسقاط الجنبي (الشكل ٣٩٢) .

الحل : يتقاطع المستويان P و Q وفق المستقيم MN الموازي لخط الأرض (لماذا ؟) . بمعرفة إتجاه المستقيم المطلوب علينا أن نوجد نقطة واحدة منه . لهذا نرسم مستوياً مساعداً أمامياً R فيقطع المستوي P وفق المستقيم (hv , h'v') والمستوي Q وفق المستقيم (h_1v_1 ، $h_1'v_1'$) وعند تقاطعهما نحصل على النقطة (k ، k') .

نرسم مسقطي المستقيم المطلوب (mn ، m'n') بصورة موازية لخط الأرض من المساقط الموافقة للنقطة (k , k') .



الشكل ٣٩٩

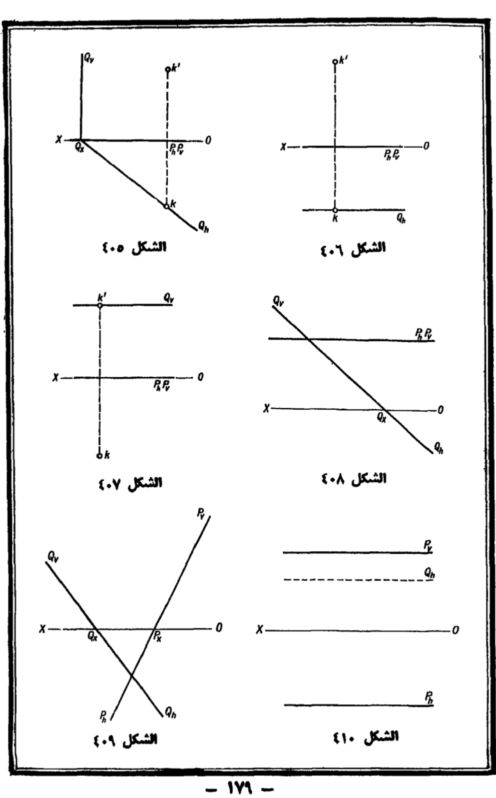
الشكل ٤٠٠

الشكل ٤٠١

الشكل ٤٠٢

الشكل ٤٠٣

الشكل ٤٠٤



الشكل ٤٠٥

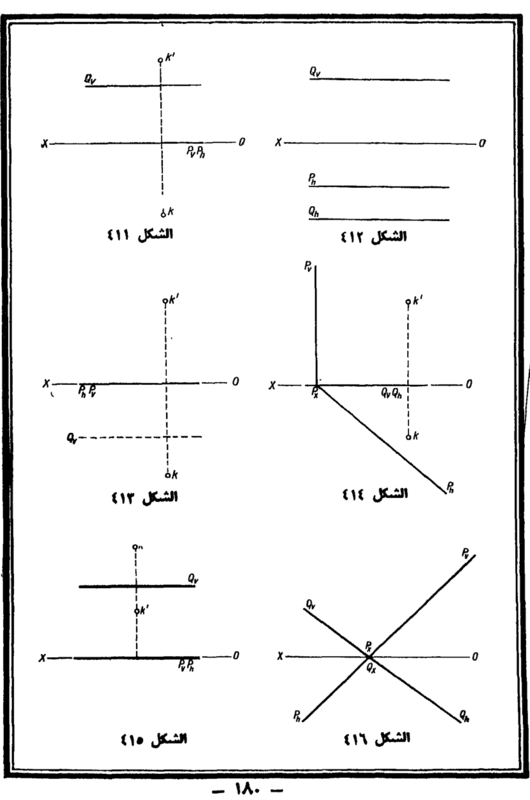
الشكل ٤٠٦

الشكل ٤٠٧

الشكل ٤٠٨

الشكل ٤٠٩

الشكل ٤١٠



الشكل ٤١١

الشكل ٤١٢

الشكل ٤١٣

الشكل ٤١٤

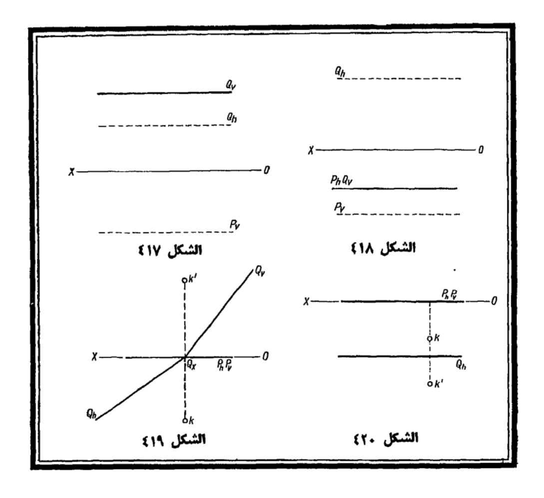
الشكل ٤١٥

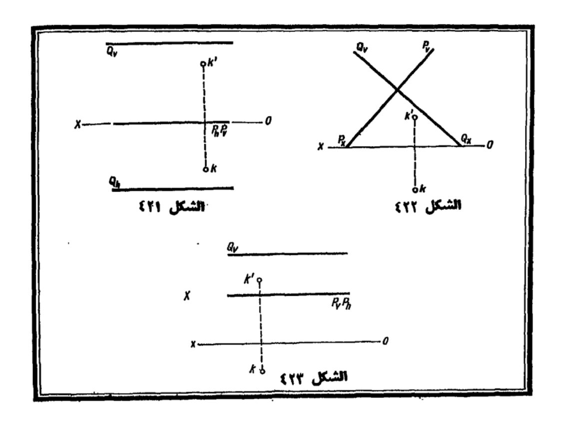
الشكل ٤١٦

مسائل

٢١٧ ـ أوجد الفصل المشترك للمستويين P و Q :

١ – بدون إستعمال مستوي مساعد (الشكل ٣٩٣ - ٤١٣) .





الشكل ٤٢١

الشكل ٤٢٢

الشكل ٤٢٣

٢ – بدون استعمال مستوي مساعد أو مستوي الإسقاط الجنبي (الشكل ٤١٠ – ٤١٣) .

٣ – باستعمال مستوي مساعد (الشكل ٤١٤ – ٤٢١) .

٢١٨ – أوجد الأثرين الأفقيين لمستويين متقاطعين P و Q إذا عرف أثراهما الشاقوليان ونقطة K من فصلهما المشترك (الشكل ٤٢٢ و ٤٢٣) .

البحث الرابع عشر

تقاطع مستقيم مع مستوي

لإيجاد نقطة تقاطع مستقيم مع مستوي نقوم بما يلي :

١ ــ نضم المستقيم المفروض في مستوي ما مساعد (والأسهل أن يكون اسقاطياً) .

٢ ــ نوجد الفصل المشترك للمستويين ــ المفروض والمساعد .

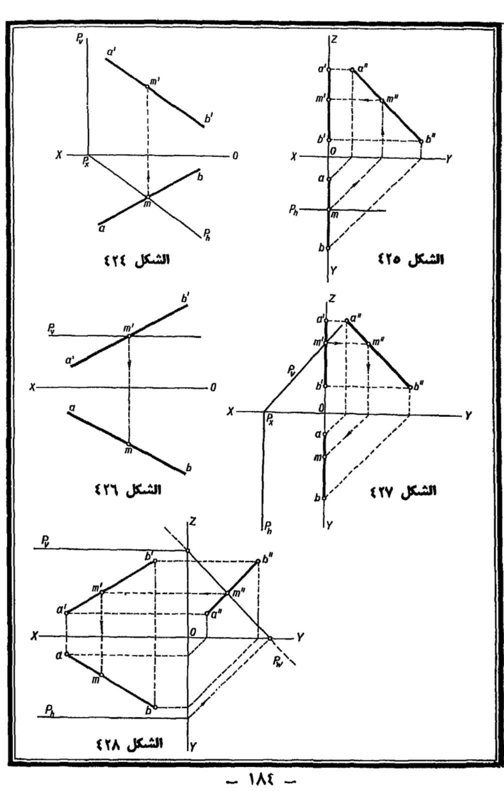
٣ ــ عند تقاطع المستقيمين المفروض والحاصل ــ نحصل على النقطة المطلوبة .

ملاحظة : إذا كان أحد عناصر التقاطع ــ المستوي أو المستقيم ــ إسقاطياً فاستعمال القاعدة المذكورة غير محبذ ، وذلك لأنه في أغلب هذه الحالات يتم تعيين نقطة التقاطع بسهولة أكبر (انظر الأمثلة) .

أمثلــة

● **المثال ١١٣ :** أوجد نقطة تقاطع المستقيم AB مع المستوي P (الشكل ٤٢٤).

الحل : لنرمز للنقطة المطلوبة بالحرف M(m,m′) . بما أن النقطة M تقع في مستوي شاقولي فمسقطهـــا الأفقي (m) يجب أن يقع على الأثر الأفقي (p_h) للمستوي . وبما أن هذه النقطة M تقـع على المستقيم AB فمسقطها الأفقي (m)



الشكل ٤٢٤

الشكل ٤٢٥

الشكل ٤٢٦

الشكل ٤٢٧

الشكل ٤٢٨

يجب أن يقع على المسقط الأفقي (ab) للمستقيم . ومنه فالمسقط الأفقي (m) النقطة المطلوبة يجب أن يقع على الأثر الأفقي (p_h) للمستوي وعلى المسقط الأفقي (ab) للمستقيم ، أي في نقطة تقاطعها . بمعرفة المسقط الأفقي (m) للنقطة المطلوبة نوجد مسقطها الشاقولي (m′) على المسقط الشاقولي (a′b′) للمستقيم .

نتيجة : المسقط الأفقي لنقطة تقاطع أي مستقيم مع مستوي شاقولي يقع عند تقاطع الأثر الأفقي للمستوي مع المسقط الأفقي للمستقيم .

● **المثال ١١٤** : أوجد نقطة تقاطع المستقيم AB مع المستوي P (الشكل ٤٢٥).

الحل : لنرمز للنقطة المطلوبة بالحرف M (m , m′) . المستوي P يوازي مستوي الإسقاط الشاقولي ، لذلك فالمسقط الأفقي (m) للنقطة المطلوبة يقع عند تقاطع المستقيمين p_h و ab . بما أن المستقيم المفروض (ab , a′b′) جنبي لذلك باستعمال مستوي الإسقاط الجنبي وبواسطة النقطة m نوجد m″ على المستقيم a″b″ بعد ذلك وبواسطة النقطة m″ نوجد النقطة m′ على المستقيم a′b′ .

● **المثال ١١٥** : أوجد نقطة تقاطع المستقيم AB مع المستوي P (الشكل ٤٢٦).

الحل : لنرمز للنقطة المطلوبة بالحرف M (m,m′) . بما أن النقطة M تقع في مستوي أفقي فمسقطها الشاقولي (m′) يجب أن يقع على الأثر الشاقولي (p_v) للمستوي . وبما أن النقطة M كذلك تقع على المستقيم AB فمسقطها الشاقولي (m′) يجب أن يقع أيضاً على المسقط الشاقولي (a′b′) للمستقيم . ومنه فالمسقط الشاقولي (m′) للنقطة المطلوبة يجب أن يقع على الأثر الشاقولي (p_v) للمستوي وعلى المسقط الشاقولي (a′b′) للمستقيم أي عند تقاطعها . بمعرفة المسقط الشاقولي (m′) للنقطة المطلوبة نوجد مسقطها الأفقي (m) على المسقط الأفقي (ab) للمستقيم .

نتيجة : إن المسقط الشاقولي لنقطة تقاطع أي مستقيم مع مستوي أمامي يقع عند تقاطع الأثر الشاقولي للمستوي الأمامي مع المسقط الشاقولي للمستقيم

● **المثال ١١٦** : أوجد نقطة تقاطع المستقيم AB مع المستوي P (الشكل ٤٢٧).

الحل : لنرمز للنقطة المطلوبة بالحرف (M (m,m′ . المستوي المفروض P أمامي . المسقط الشاقولي (′m) للنقطة المطلوبة يقع عند تقاطع المستقيمين p_v و ′a′b .

بما أن المستقيم المفروض جنبي لذلك باستعمال مستوي الإسقاط الجنبي وبمساعدة النقطة ′m نوجد النقطة ″m على المستقيم ″a″b ، وبعد ذلك وبمساعدة ″m نوجد النقطة m على المستقيم a b .

● **المثال ١١٧** : أوجد نقطة تقاطع المستقيم AB مع المستوي P (الشكل٤٢٨) .

الحل : لنرمز للنقطة المطلوبة بالحرف (M (m,m′ . بما أن النقطة M تقع في مستوي موازي لخط الأرض فمسقطها الجنبي (″m) يجب أن يقع على الأثر الجنبي (P_w) للمستوي . وبما أن هذه النقطة تقع على المستقيم AB فمسقطها الجنبي(″m)يجب أن يقع كذلك على المسقط الجنبي(″a″b)للمستقيم . ومنه فالمسقط الجنبي (″m) للنقطة المطلوبة يجب أن يقع على الأثر (p_w) للمستوي ،وعلى المسقط الجنبي (″a″b) للمستقيم أي عندتقاطعهما .

بإيجاد الأثر الجنبي للمستوي والمسقط الجنبي للمستقيم نحصل عند تقاطعها على المسقط الجنبي (″m) للنقطة المطلوبة . وبمعرفة المسقط الجنبي (″m) للنقطة المطلوبة نوجد مسقطيها الآخرين على مسقطي المستقيم الموافقين .

نتيجة : المسقط الجنبي لنقطة تقاطع أي مستقيم مع مستوي موازي لخط الأرض يقع عند تقاطع الأثر الجنبي للمستوي مع المسقط الجنبي للمستقيم .

ملاحظة : فيما يلي نبين كيف يمكن أن نحل هذه المسألة بدون استعمال مستوي الإسقاط الجنبي .

● **المثال ١١٨ :** أوجد نقطة تقاطع المستقيم AB مع المستوي P (الشكل٤٢٩) .

الحل : لنرمز للنقطة المطلوبة بالحرف (M (m,m′ . المستوي المفروض P يمر من خط الأرض إذن المسقط الجنبي (″m) للنقطة المطلوبة سيقع عند تقاطع الأثر الجنبي (p_w) للمستوي والمسقط الجنبي (″a″b) للمستقيم .

بمعرفة المسقط الجنبي (″m) للنقطة المطلوبة ، نوجد المسقطين الآخرين للنقطة على مسقطي المستقيم الموافقين .

ملاحظة : يمكن حل المسألة بدون إستعمال مستوي الإسقاط الجنبي ، ولكن الحل بالطريقة المشروحة أبسط بكثير .

● **المثال ١١٩ :** أوجد نقطة تقاطع المستقيم AB مع المستوي P (الشكل ٤٣٠) .

الحل : لنرمز للنقطة المطلوبة بالحرف (′M (m,m . بما أن هذه النقطة تقع على المستقيم الشاقولي (′ab,a′b) فمسقطها الأفقي (m) يجب أن ينطبق على المسقط الأفقي (ab) للمستقيم . وبمعرفة المسقط الأفقي (m) للنقطة نوجد مسقطها الشاقولي (′m) ، لهذا يستعمل مستقيم جبهي (أو أفقي) . تتمة الانشاء مبينة على الشكل .

● **المثال ١٢٠ :** أوجد نقطة تقاطع المستقيم AB مع المستوي P (الشكل ٤٣١) .

الحل : لنرمز للنقطة المطلوبة بالحرف (M (m,m′ . بما أن هذه النقطة تقع على مستقيم أمامي فمسقطها الشاقولي (′m) ينطبق على المسقط الشاقولي (′a′b) للمستقيم .

وبمعرفة المسقط الشاقولي (m′) للنقطة نوجد مسقطها الأفقي (m) ،لهذا يستعمل مستقيم أفقي (أو جبهي) . تتمة الإنشاء مبينة على الشكل .

● **المثال ١٢١ :** أوجد نقطة تقاطع المستقيم AB مع المستوي P (الشكل ٤٣٢) .

الحل : لنرمز للنقطة المطلوبة بالحرف (M (m،m′ . بما أن هذه النقطة تقع على مستقيم شاقولي فمسقطها الأفقي (m) ينطبق على المسقط الأفقي (ab) للمستقيم . وبمعرفة المسقط الأفقي (m) للنقطة نوجد المسقط الأفقي (m′) ، لهذا نستعمل مستقيماً مساعداً (nk , n′k′) . تتمة الإنشاء مبينة على الشكل .

● **المثال ١٢٢ :** أوجد نقطة تقاطع المستقيم AB مع المستوي P (الشكل٤٣٣) .

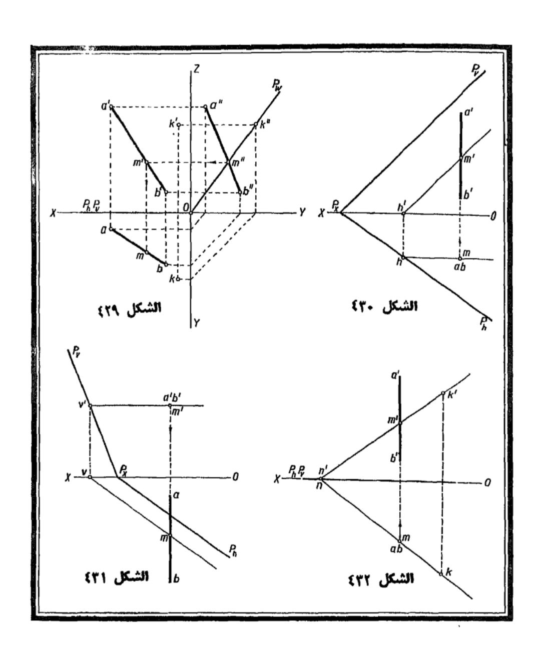
الحل : لنرمز للنقطة المطلوبة بالحرف (M (m,m′ . بما أن هذه النقطة تقع على مستقيم أمامي فمسقطها الشاقولي (m′) سينطبق على المسقط الشاقولي (a′b′) للمستقيم . وبمعرفة المسقط الشاقولي (m′) للنقطة نوجد مسقطها الأفقي (m) ، لهذا نستعمل مستقيماً مساعداً (hv,h′v′) . بالرغم من أن المستوي P يوازي خط الأرض فالمسألة تحل بدون استعمال مستوي الإسقاط الجنبي .

في الحالة المعطاة لم نستعمل مميزات نقاط المستوي إنما مميزات نقاط المستقيم الأمامي .

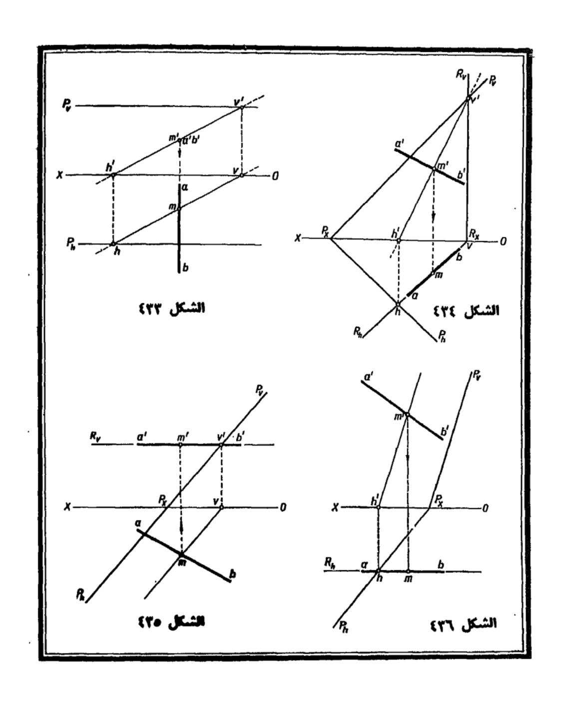
● **المثال ١٢٣ :** أوجد نقطة تقاطع المستقيم AB مع المستوي P (الشكل٤٣٤) .

الحل : لنرمز للنقطة المطلوبة بالحرف (M(m،m′ . نضم المستقيم AB في مستوي شاقولي R (أو في مستوي أمامي) ، فيقطع المستوي المفروض وفق المستقيم (hv,h′v′) . عند تقاطع المسقطين الشاقوليين (h′v′ و a′b′) نحصل على المسقط الشاقولي (m′) للنقطة المطلوبة . بعد ذلك وبمساعدة المسقط الشاقولي (m′) للنقطة نوجد مسقطها الأفقي (m) على المسقط الأفقي (ab) للمستقيم .

● **المثال ١٢٤ :** أوجد نقطة تقاطع المستقيم AB مع المستوي P (الشكل٤٣٥) .



الحل : لنرمز للنقطة المطلوبة بالحرف M (m,m′) . لنضم المستقيم AB في المستوي P ، الذي يوازي مستوي الإسقاط الأفقي ويقطع المستوي المفروض P



وفق مستقيم أفقي . عند تقاطع المسقطين الافقيين للمستقيم الأفقي والمستقيم المفروض نحصل على المسقط الأفقي (m) للنقطة المطلوبة . وبمساعدة المسقط الأفقي (m) للنقطة

نوجد مسقطها الشاقولي (m′) على المستقيم (a′b′) .

المستقيم AB يمكن أن يضم في مستوي شاقولي أيضاً ، ولكن هذا يعقد حل المسألة . (على الطالب التحقق من ذلك) .

● **المثال ١٢٥** : أوجد نقطة تقاطع المستقيم AB مع المستوي P (الشكل ٤٣٦) .

الحل : لنرمز للنقطة المطلوبة بالحرف M (m,m′) . لنضم المستقيم AB في المستوي الجبهي R فيقطع المستوي المفروض P وفق مستقيم جبهي . وعند تقاطع المسقطين الشاقوليين للمستقيم الجبهي والمستقيم المفروض نحصل على المسقط الشاقولي (m′) للنقطة المطلوبة. وبمساعدة المسقط الشاقولي (m′) للنقطة نوجد المسقط الأفقي (m) على المسقط الأفقي (ab) للمستقيم.

● **المثال ١٢٦** : أوجد نقطة تقاطع المستقيم AB مع المستوي P (الشكل ٤٣٧) .

الحل : لنرمز للنقطة المطلوبة بالحرف (M (m,m′ . لنضم المستقيم AB في مستوي شاقولي R فيقطع المستوي المفروض P وفق المستقيم (hv, h′v′) . عند تقاطع المسقطين الشاقوليين للمستقيمين ـ المساعد والمفروض ـ نحصل على المسقط الشاقولي (m′) للنقطة المطلوبة . بمساعدة المسقط الشاقولي (m′) للنقطة نوجد المسقط الأفقي (m) على المسقط الأفقي للمستقيم (ab) .

● **المثال ١٢٧** : أوجد نقطة تقاطع المستقيم AB مع المستوي P (الشكل ٤٣٨) .

الحل : لنرمز للنقطة المطلوبة بالحرف (M (m,m′ . لنضم المستقيم AB في مستوي أمامي R فيقطع المستوي المفروض وفق المستقيم (hv ، h′v′) . عند تقاطع المسقطين الأفقيين للمستقيمين ـ المفروض والمساعد ـ نحصل على المسقط الأفقي (m) للنقطة المطلوبة . بعد ذلك وبمساعدة المسقط الأفقي (m) للنقطة نوجد مسقطها الشاقولي (m′) على المسقط الشاقولي (a′b′) للمستقيم .

● **المثال ١٢٨** : أوجد نقطة تقاطع المستقيم AB مع المستوي P (الشكل ٤٣٩) .

الحل : لنرمز للنقطة المطلوبة بالحرف (M (m,m' . بما أن المستقيم المفروض AB جنبي ، لذلك فلحل هذه المسألة يجب أن لا نغض النظر عن مستوي الإسقاط الجنبي . نحل المسألة كما مر معنا في المثال ١١٧ . نرسم الأثر الجنبي (p_w) للمستوي ، والمسقط الجنبي (a″b″) للمستقيم . وعند تقاطعهما نحصل على المسقط الجنبي (m″) للنقطة المطلوبة . بعد ذلك وبمساعدة المسقط الجنبي (m″) للنقطة نوجد المسقطين الآخرين (m و m') على المسقطين الموافقين (a'b'وab) للمستقيم .

● **المثال ١٢٩ :** أوجد نقطة تقاطع المستقيم AB مع المستوي P (الشكل ٤٤٠) .

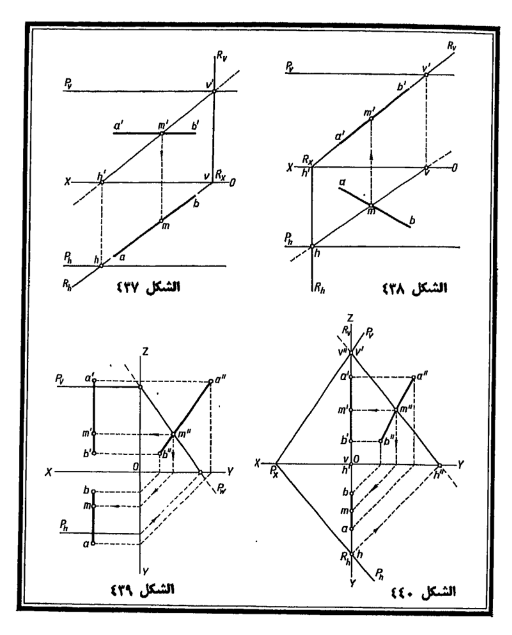
الحل : لنرمز للنقطة المطلوبة بالحرف (M(m,m' . لنضم المستقيم AB في مستوي جنبي R فيقطع المستوي المفروض P وفق مستقيم جنبي (hv ، h'v') . بما أن كلا المستقيمين – المفروض والمساعد – جنبيين ، لذلك نوجد المسقط الجنبي (m″) للنقطة المطلوبة عند تقاطع المسقطين الجنبيين (a″b″ و h″v″) لهذين المستقيمين . بعد ذلك وبمساعدة المسقط الجنبي (m″) للنقطة نوجد المسقطين الآخرين (m وm') على المسقطين الموافقين (ab و a'b') للمستقيم .

● **المثال ١٣٠ :** أوجد نقطة تقاطع المستقيم MN مع مستوي معطى بمستقيمين متوازيين AB و CD (الشكل ٤٤١) .

الحل : لنرمز للنقطة المطلوبة بالحرف (K(k,k' . بما أن المستوي المفروض شاقولي (لماذا ؟) ، نوجد المسقط الأفقي (k) للنقطة عند تقاطع المستقيمين mn و ab ، (لماذا ؟) ، أو المستقيمين mn و cd . وبمساعدة المسقط الأفقي (k) للنقطة نوجد مسقطها الشاقولي (k') على المسقط الشاقولي (m'n') للمستقيم .

● **المثال ١٣١ :** أوجد نقطة تقاطع المستقيم MN مع مستوي المثلث ABC (الشكل ٤٤٢) .

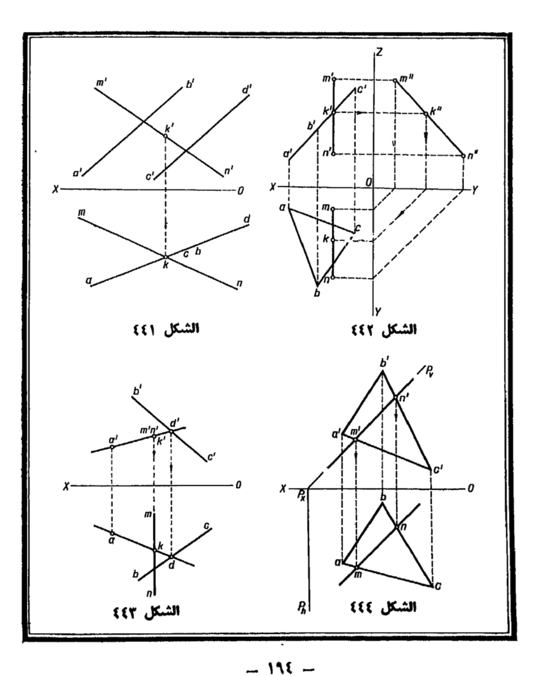
الحل : لنرمز للنقطة المطلوبة بالحرف K (k,k′) . بما أن المستوي المفروض أمامي (لماذا ؟) ، نوجد المسقط الشاقولي (k′) للنقطة عند تقاطع المستقيم m′n′ مع المسقط الشاقولي (a′b′c′) للمثلث (لماذا ؟) . بمساعدة المسقط الشاقولي (k′) للنقطة



الشكل ٤٣٧   الشكل ٤٣٨   الشكل ٤٣٩   الشكل ٤٤٠

نوجد مسقطها الأفقي (k) على المسقط الأفقي (mn) للمستقيم (كيف ؟)

● **المثال ١٣٢ :** أوجد نقطة تقاطع المستقيم MN مع المستوي المعطى بنقطة A ومستقيم BC (الشكل ٤٤٣)



الشكل ٤٤١

الشكل ٤٤٢

الشكل ٤٤٣

الشكل ٤٤٤

الحل : لنرمز للنقطة المطلوبة بالحرف (K (k,k' . بما أن هذه النقطة يجب أن تقع على المستقيم الأمامي (mn , m'n') فسقطها الشاقولي (k') يجب أن ينطبق على النقطتين m' و n' (لماذا ؟) . بواسطة المسقط الشاقولي (k') للنقطة نوجد مسقطها الأفقي (k) على المستقيم mn بمعرفة أن النقطة (k,k') تقع كذلك في المستوي المفروض . تتمة الحل مبينة على الشكل

● **المثال ١٣٣ :** أوجد الفصل المشترك للمستوي P مع مستوي المثلث ABC (الشكل ٤٤٤) .

الحل : الطريقة الأولى : يتعين الفصل المشترك بنقطتين تابعتين للمستويين المفروضين بآن واحد . نوجد النقطتين (m،m') و (n،n') أي نقطتي تقاطع الضلعين (ac, a'c') و (bc, b'c') للمثلث مع المستوي P . المستقيم (mn,m'n') المار من النقطتين (m,m') و (n,n') هو المستقيم المطلوب .

الطريقة الثانية : بما أن المستوي P – أمامي ، فالمسقط الشاقولي (m'n') للفصل المشترك ينطبق على الأثر الشاقولي (p_v) للمستوي . وبما أن المستقيم المطلوب (mn,m'n') ينتمي لمستوي المثلث ABC ، فبمساعدة المسقط الشاقولي (m'n') للفصل المشترك نوجد مسقطه الأفقي (mn) .

● **المثال ١٣٤ :** أوجد الفصل المشترك للمستوي P مع المستوي المعطى بمستقيم معلوم AB ونقطة معلومة C (الشكل ٤٤٥) .

الحل : الطريقة الأولى : يتعين الفصل المشترك إذا أوجدنا نقطتين تابعتين للمستويين المفروضين . النقطة (c ,c') لا يمكن اعتبارها نقطة من الفصل المشترك (لماذا ؟) . لايجاد هاتين النقطتين من الأسهل أن نحول المستوي المعطى

بمستقيم ونقطة إلى مستوٍ معطى بمستقيمين متوازيين (ab , a'b') و(cd,c'd') .

بعد ذلك نوجد النقطتين (m,m') و (n,n') الموافقتين لتقاطع هـذين المستقيمين مع المستوي P . المستقيم (mn,m'n') المار من النقطتين (m,m') و (n,n') هو المستقيم المطلوب

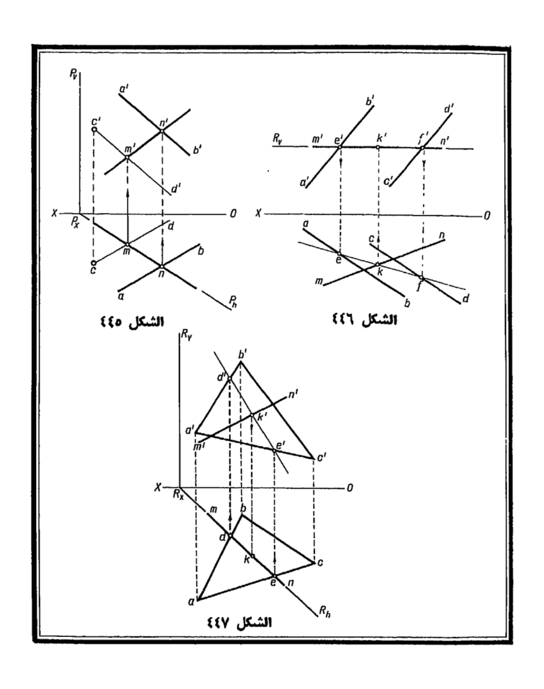
الطريقة الثانية : بما أن المستوي P - شاقولي فالمسقط الأفقي (mn) للفصل المشترك سينطبق على الأثر الأفقي (p_h) للمستوي . وبما أن المستقيم المطلوب (mn , m'n') ينتمي أيضاً للمستوي الثاني لذلك بواسطة المسقط الأفقي (mn) للمستقيم نوجد مسقطه الشاقولي (m'n') .

● **المثال ١٣٥ :** أوجد نقطة تقاطع المستقيم MN مع المستوي المعين بالمستقيمين المتوازيين ABو CD (الشكل ٤٤٦) .

الحل : بما أن المستوي المفروض كيفي (لماذا ؟) ، لذلك نضم المستقيم MN في مستوي مساعد R مثلاً أفقي ، ثم نوجـد الفصل المشترك (ef,e'f') للمستويين . النقطة المطلوبة (k,k') نحصل عليها عند تقـاطع المستقيمين (mn , m'n') و (ef,e'f') . (انظر المثال ١٣٣) .

● **المثال ١٣٦ :** أوجد نقطة تقاطع المستقيم MN مـع مستوي المثلث ABC (الشكل ٤٤٧) .

الحل : نضم المستقيم MN فى مستوي شاقولي مساعد R ، ثم نوجد الفصل المشترك (de,d'e') للمستويين ، النقطة المطلوبة (k,k') تقع عند تقاطـع المستقيمين (mn,m'n') و (de , d'e') .

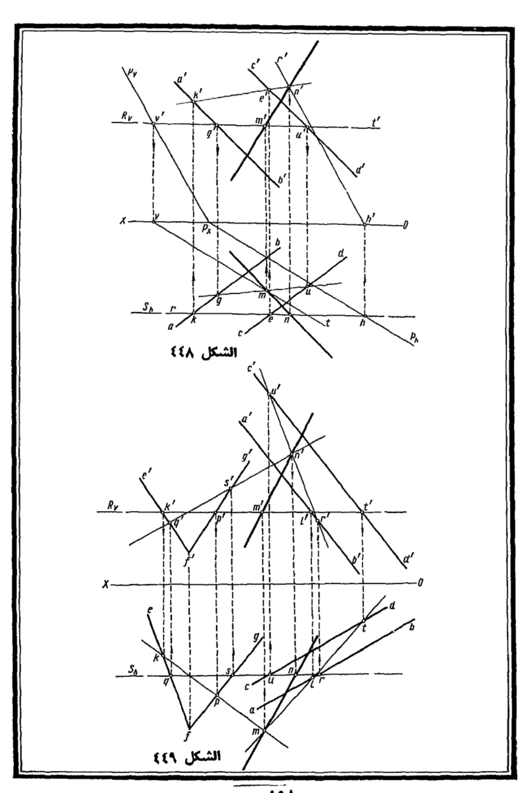


الشكل ٤٤٥

الشكل ٤٤٦

الشكل ٤٤٧

● **المثال ١٣٧** : أوجد الفصل المشترك للمستوي P مع المستوي المعين بالمستقيمين المتوازيين AB وCD (الشكل ٤٤٨) .



الشكل ٤٤٨

الشكل ٤٤٩

الحل : يمكن حل هذه المسألة بثلاث طرق .

الطريقة الأولى : نحول المستوي المعطى بدون أثريه إلى مستو معطى بأثريه، بعد ذلك نحل المسألة كما مر معنا أعلاه . (انظر الأمثلة ٩٥ – ١١٢) .

الطريقة الثانية : نوجد نقاط تقاطع المستقيمين AB و CD مع المستوي P فيتعين لدينا الفصل المشترك .

الطريقة الثالثة : نوجد النقاط التي تعين الفصل المشترك ، وذلك برسم مستويين مساعدين على التوالي .

أسهل هذه الطرق الثلاث هي الطريقة الثالثة . لنرسم مستوياً مساعداً R موازياً لمستوي الإسقاط الأفقي فيقطع المستوي P وفق مستقيم أفقي(vt,v′t′) ، والمستوي الثاني وفق مستقيم أفقي (gu,g′u′) ، وعند تقاطعهما نحصل على النقطة (m,m′) . بعد ذلك نرسم مستوياً مساعداً آخراً S مثلاً موازياً لمستوي الإسقاط الشاقولي فيقطع المستوي P وفق المستقيم الجبهي (rh,r′h′) ، والمستوي الآخر وفق المستقيم الجبهي (ke,k′e′) وعند تقاطعهما نحصل على النقطة (n,n′) . المستقيم (mn,m′n′) الذي يمر من النقطتين (m,m′) و (n,n′) هو المستقيم المطلوب .

● **المثال ١٣٨ :** أوجد الفصل المشترك للمستويين المعطيين بالمستقيمين المتقاطعين FE و FG والمستقيمين المتوازيين AB و CD (الشكل ٤٤٩) .

الحل : لنوجد النقطتين (m,m′) و (n,n′) المشتركتين بين المستويين المفروضين . لهذا نرسم مستوياً مساعداً R موازيـــاً لمستوي الإسقاط الأفقي فيقطع المستويين المفروضين وفق المستقيمين الأفقيين (kp,k′p′) و (lt,l′t′) وعنـــد تقاطعهما نحصل على النقطة (m,m′) . بعـــد ذلك نرسم المستوي المساعد الآخر S موازياً

لمستوي الاسقاط الشاقولي فيقطع المستويين المفروضين وفق مستقيمين جبهيين (qs,q′s′) و (ru,r′u′) ، وعند تقاطعها نحصل على النقطة (n,n′) . المستقيم (mn,m′n′) المار من النقطتين (m,m′) و (n,n′) هو المستقيم المطلوب .

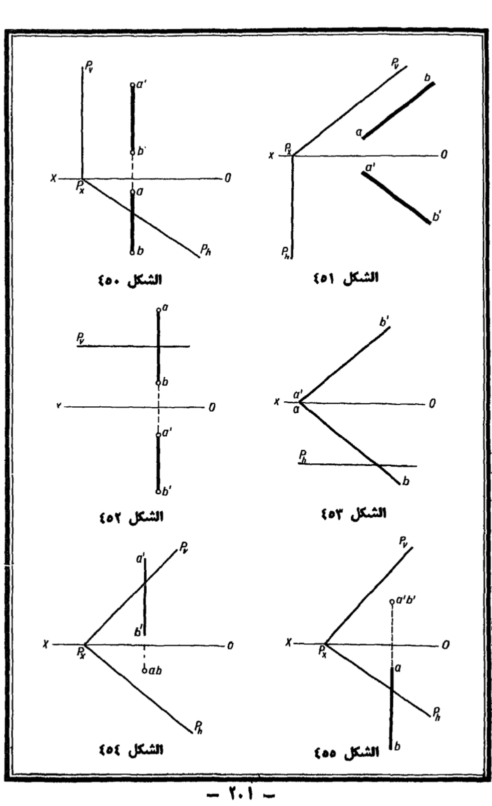
مسائل

٢١٩ ــ أوجد نقطة تقاطع المستقيم AB مع المستوي P (الشكل ٤٥٠ ــ ٤٦٧) .

٢٢٠ ــ أوجد نقطة تقاطع المستقيم AB مع المستوي المعين بغير أثريه (الشكل ٤٦٨ ــ ٤٧٣) .

٢٢١ ــ أوجد الفصل المشترك للمستوي المعين بالمثلث ABC مع المستوي P ثم بيّن من أي الأرباع يمر المستقيم المطلوب (الشكل ٤٧٤) .

٢٢٢ ــ أوجد الفصل المشترك للمستوي المعين بمستقيمين متوازيين KL و MN ، مع المستوي المعين بمستقيمين متقاطعين AB و AC ، ثم بيّن من أي الأرباع يمر المستقيم المطلوب (الشكل ٤٧٥) .



الشكل ٤٥٠

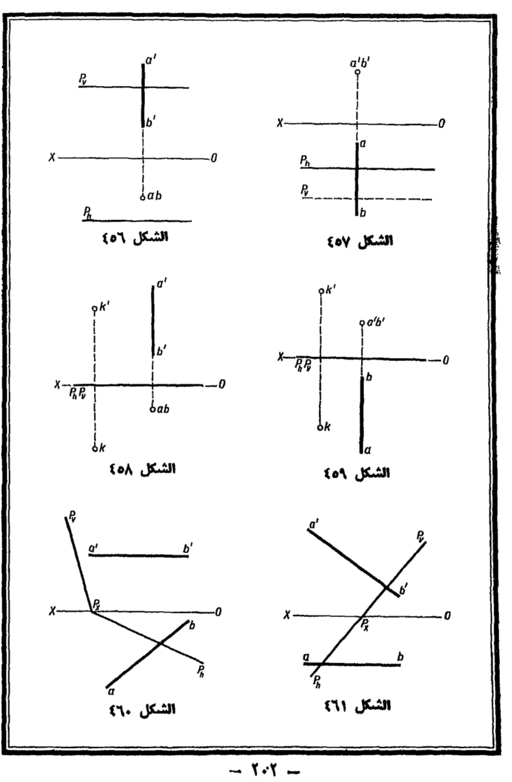
الشكل ٤٥١

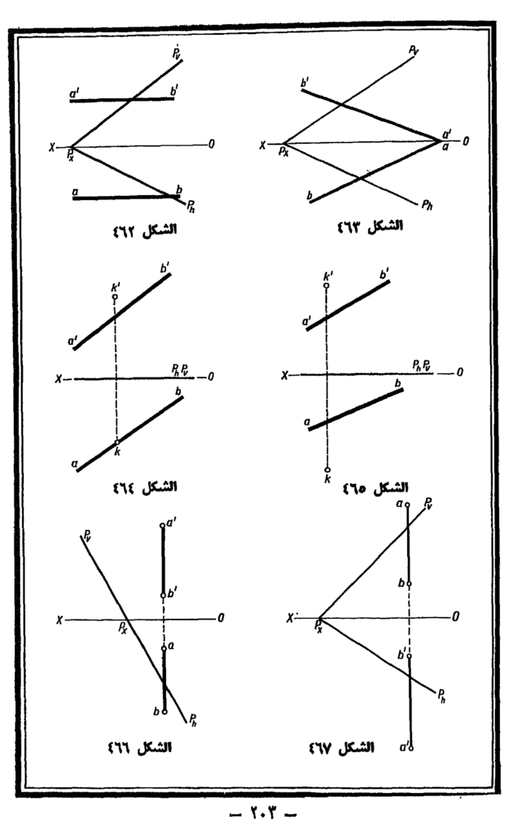
الشكل ٤٥٢

الشكل ٤٥٣

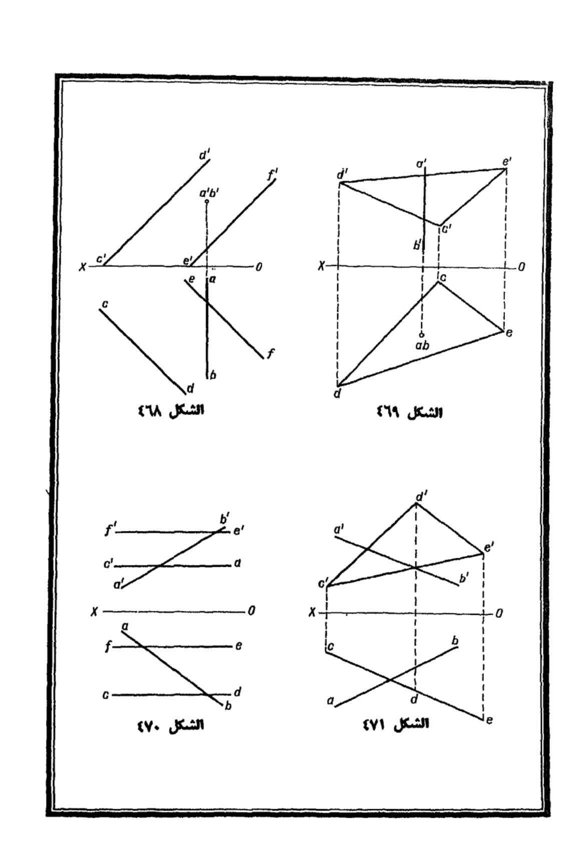
الشكل ٤٥٤

الشكل ٤٥٥


a'
P_v
b'
X
0
ab
P_h
الشكل ٤٥٦
a'b'
X
0
a
P_h
P_v
b
الشكل ٤٥٧
a'
k'
b'
X
$P_h P_v$
0
ab
k
الشكل ٤٥٨
k'
a'b'
X
$P_h P_v$
0
b
k
a
الشكل ٤٥٩
P_v
a'
b'
X
P_x
0
b
P_h
a
الشكل ٤٦٠
a'
P_v
b'
X
0
P_x
a
b
P_h
الشكل ٤٦١



P_v
a'
b'
X
P_x
0
a
b
P_h
الشكل ٤٦٢
P_v
b'
a'
X
P_x
a
0
b
P_h
الشكل ٤٦٣
b'
k'
a'
X
P_h P_v
0
b
a
k
الشكل ٤٦٤
k'
b'
a'
X
P_h P_v
0
b
a
k
الشكل ٤٦٥
P_v
a'
b'
X
P_x
0
a
b
P_h
الشكل ٤٦٦
a
P_v
b
X
P_x
0
b'
P_h
a'
الشكل ٤٦٧

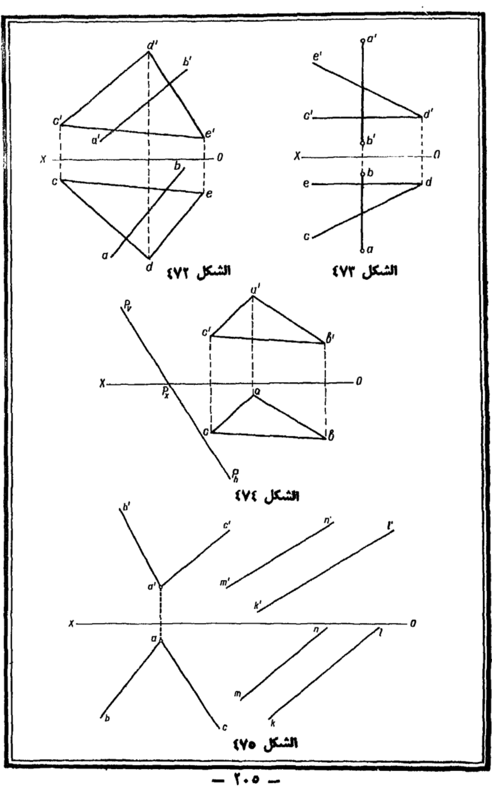


الشكل ٤٦٨

الشكل ٤٦٩

الشكل ٤٧٠

الشكل ٤٧١



الشكل ٤٧٢

الشكل ٤٧٣

الشكل ٤٧٤

الشكل ٤٧٥

البحث الخامس عشر

توازي مستقيم مع مستوي

توازي المستويات

يتوازى مستقيم مع مستوي إذا أمكن رسم مستقيم في المستوي يوازي المستقيم المفروض .

يتوازى مستويان P و Q معينان بأثريها إذا توازى كل من أثريها المتماثلين .

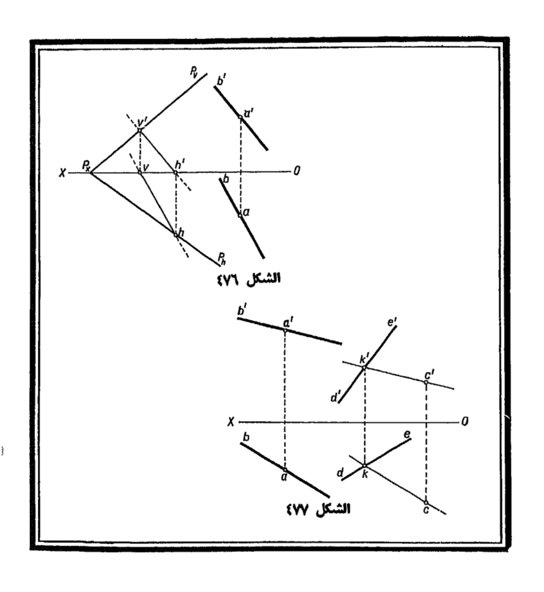
النظرية العكسية ليست دائماً صحيحة في المجموعة H وV ، مثـــلاً يتوازى مستويان موازيان لخط الأرض عندما يتوازى أثراهما الجنبيان فيما بينهما .

إن المستقيات الرئيسية -الأفقية أو الجبهية - لمستويين متوازيين متوازية فيما بينها . يفضل استعمال خاصــة المستقيات الرئيسية هــذه لإيضاح توازي مستويين ، عند ما لا يعطى أحد المستويين أو كلاهما بآثارهما (إيجاد أثري المستوي ليس ضرورياً) .

يمكن التحقق كذلك من توازي مستويين بمساعدة مستقيمين اختياريين .

أمثلـــة

● **المثال ١٣٩ :** لدينا مستوي P ونقطة A . مرر من النقطة A مستقيماً يوازي المستوي P (الشكل ٤٧٦) .



الشكل ٤٧٦

الشكل ٤٧٧

الحل : لنأخذ في المستوي P مستقيماً ما (hv , h'v') ثم نرسم من النقطة (a,a') مستقيماً (ab,a'b') موازياً له . بما أن المستقيم (hv , h'v') معطى في المستوي بصورة كيفيـــة ، بناء عليه فمن النقطة A يمكن أن نرسم مستقيمات

كثيرة موازية للمستوي P . ولكن من النقطة A يمكن أن نرسم فقط مستقيماً أفقياً واحداً ، ومستقيماً جبهياً واحداً موازياً للمستوي المفروض (لماذا ؟) .

● **المثال ١٤٠ :** لدينا نقطة A ومستوي – مستقيم DE ونقطة C . مرر من النقطة مستقيماً ما موازياً للمستوي المفروض (الشكل ٤٧٧) .

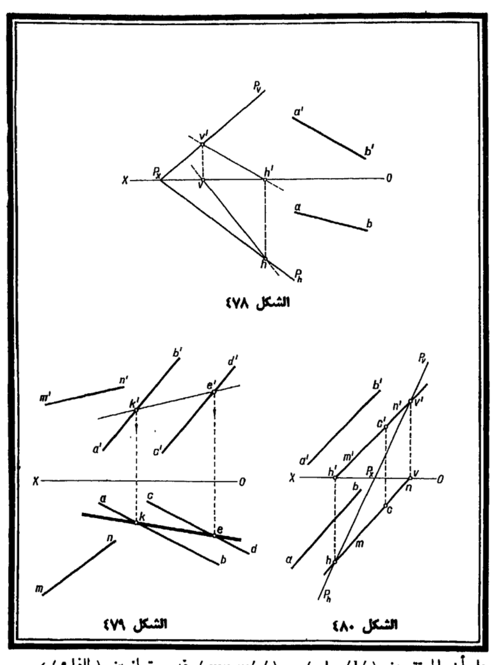
الحل : لنأخذ في المستوي مستقيماً ما (ck , c'k') . من النقطة (a,a') نرسم مستقيماً (ab , a'b') موازياً له . (المسألة غير معينة) .

● **المثال ١٤١ :** لدينا مستوي P ومستقيم AB . هل هما متوازيان فيما بينهما (الشكل ٤٧٨) ؟

الحل : المستقيم AB يوازي المستوي P إذا أمكننا أن نرسم في هـــذا المستوي مستقيماً يوازي المستقيم المفروض AB . لنرسم المسقط الشاقولي (h'v') لمستقيم واقع في المستوي موازياً لـ (a'b') ، بعد ذلك نوجد مسقطه الأفقي (hv)، فإذا كان hv يوازي المستقيم ab فـــان المستقيم (ab,a'b') سيوازي المستوي P والعكس بالعكس . في المسألة المعطاة المستقيم AB والمستوي P غير متوازيين. يمكن أن نبدأ حل المسألة برسم المسقط الأفقي (hv) للمستقيم .

● **المثال ١٤٢ :** لدينا مستقيم MN ومستوي معين بمستقيمين متوازيين AB وCD . هل هما متوازيان فيما بينهما (الشكل ٤٧٩) ؟

الحل : نرسم المسقط الشاقولي (e'k') لمستقيم مساعد ما واقع في المستوي المفروض موازياً للمستقيم m'n' ، ثم نوجد مسقطه الأفقي (ek) .



الشكل ٤٧٨

الشكل ٤٧٩

الشكل ٤٨٠

بما أن المستقيمين (ek,e′k′) و (mn,m′n′) غير متوازيين (لماذا ؟) ، فالمستقيم المعطى والمستوي غير متوازيين .

يمكن أن نبدأ حل المسألة برسم المسقط الأفقي (ek) لمستقيم مساعد ما .

● **المثال ١٤٣ :** لدينا مستقيم AB ونقطة C . مرر من النقطة C مستوياً كيفياً P موازياً للمستقيم AB بحيث يقع أثراه على استقامة واحدة (الشكل ٤٨٠) .

الحل : لكي يكون المستوي P المار من النقطة C موازياً للمستقيم AB يجب أن يحوي مستقيماً موازياً للمستقيم AB . لنرسم من النقطة (c , c′) مستقيماً (mn,m′n′) موازياً للمستقيم (ab,a′b′) ، ولنضمه في مستوي . لهذا نوجد الأثرين (h,h′) و (v,v′) للمستقيم (mn،m′n′) ونرسم من النقطتين (h.h′) و (v,v′) أثري المستوي المطلوب P_h و P_v على استقامة واحدة .

ملاحظة : في الحالة العامة إذا لم تعط معلومات إضافية عن وضعيـــة أثري المستوي فالمسألة غير معينة . في هذه الحالة نأخذ النقطة p_x كنقطة ما على خط الأرض .

● **المثال ١٤٤ :** لدينا مستقيمان AB و CD . مرر من المستقيم AB مستوياً يوازي المستقيم CD (الشكل ٤٨١) .

الحل : لـكي يكون المستوي المار من المستقيم AB موازياً للمستقيم CD يجب أن يحوي على مستقيم موازٍ للمستقيم CD . لنرسم من نقطة ما (k،k′) من المستقيم (ab ، a′b′) مستقيمـاً (mk ، m′k′) موازيـاً للمستقيم (cd , c′d′) . المستقيمان (ab ، a′b′) و (mk,m′k′) يعينان المستوي المطلوب .

بصورة مماثلة يمكن أن نرسم من المستقيم CD مستوياً وحيداً موازياً لـ AB . يمكن تعيين هذه المستويات بآثارها ، ولإيجادها يجب أن نستعمل الطريقة المذكورة سابقاً (كيف ؟) .

نتيجة : من مستقيمين متخالفين يمكن أن نرسم مستويين متوازيين وحيدين .

● **المثال ١٤٥ :** لدينا مستوي P ونقطة إلتقاء أثري المستوي Q الموازي للمستوي P .

ارسم أثري المستوي Q (الشكل ٤٨٢ و ٤٨٣) .

الحل : إن أثري المستوي Q يجب أن يكونا موازيين لأثري المستوي P الموافقين . نرسم من النقطة Q_x الأثرين : Q_h – موازياً لـ P_h و Q_v – موازياً لـ P_v .

● **المثال ١٤٦ :** لدينا مستوي P ونقطة A . مرر من النقطة A مستوياً Q يوازي المستوي P (الشكل ٤٨٤) .

الحل : إن المستوي المطلوب Q – شاقولي . بما أن هـذا المستوي يجب أن يمر من النقطة (a،a′) لذلك وقبل كل شيء نرسم الأثر الأفقي (Q_h) للمستوي من النقطة a موازياً للأثر P_h فيتقاطع مع خط الأرض في النقطة Q_x . بعد ذلك نرسم من هذه النقطة الأثر الشاقولي (Q_v) للمستوي موازياً للأثر P_v .

ملاحظة : إذا كانت النقطـة Q_x خارج مجـال الشكل فعندها لا لزوم لرسم الأثر الشاقولي .

● **المثال ١٤٧ :** لدينا مستوي P ونقطة A . مرر من النقطة A مستوياً Q يوازي المستوي P (الشكل ٤٨٥) .

الحل : إن المستوي المطلوب Q – موازي لخط الأرض . من المعـلوم أن الشرط اللازم لتوازي مستويين موازيين لخط الأرض هو توازي أثريها الجنبيين . لنوجد الأثر الجنبي (P_w) للمستوي P والمسقط الجنبي (a″) للنقطة A . بما أن المستوي Q يجب أن يمر من النقطة (a،a′) لذلك نرسم الأثر الجنبي (Q_w) للمستوي Q موازياً للأثر P_w من المسقط الجنبي (a″) للنقطة . بعـد ذلك وبمعرفة Q_w نوجـد الأثرين Q_h و Q_v الموازيين لخط الأرض .

ملاحظة : يمكن حل المسألة بـــدون إستعمال مستوي الاسقاط الجنبي (انظر المثال ١٤٩– الطريقة الأولى) .

● **المثال ١٤٨ :** لدينا مستوي P ونقطة A . مرر من النقطة A مستوياً Q يوازي المستوي P . (الشكل ٤٨٦) .

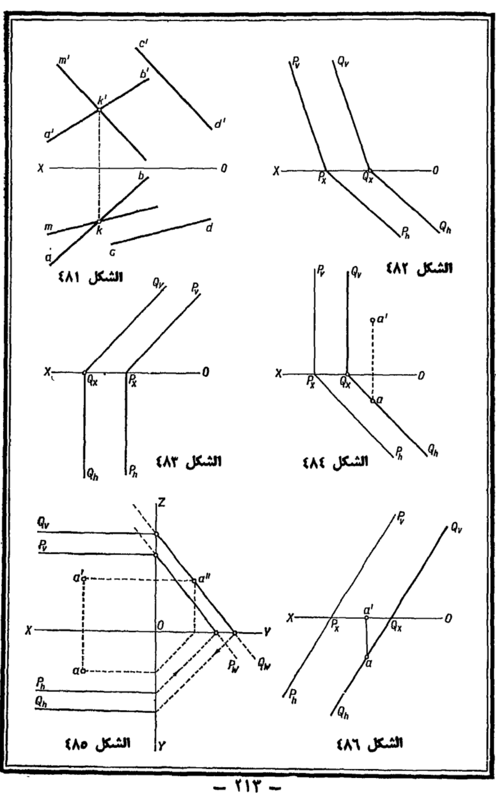
الحل : إن المستوي المطلوب Q كيفي وأثراه واقعان على استقامة واحدة . بما أن النقطة (a,a′) التي يمر منها المستوي Q واقعة في مستوي الإسقاط الأفقي لذا يجب أن تقع على الأثر الأفقي (Q_h) للمستوي . ومنه نرسم من النقطة a الأثر الأفقي (Q_h) للمستوي فيتقاطع مع خط الأرض في النقطة (Q_x) ، إن امتداده هو الأثر الشاقولي (Q_v) للمستوي .

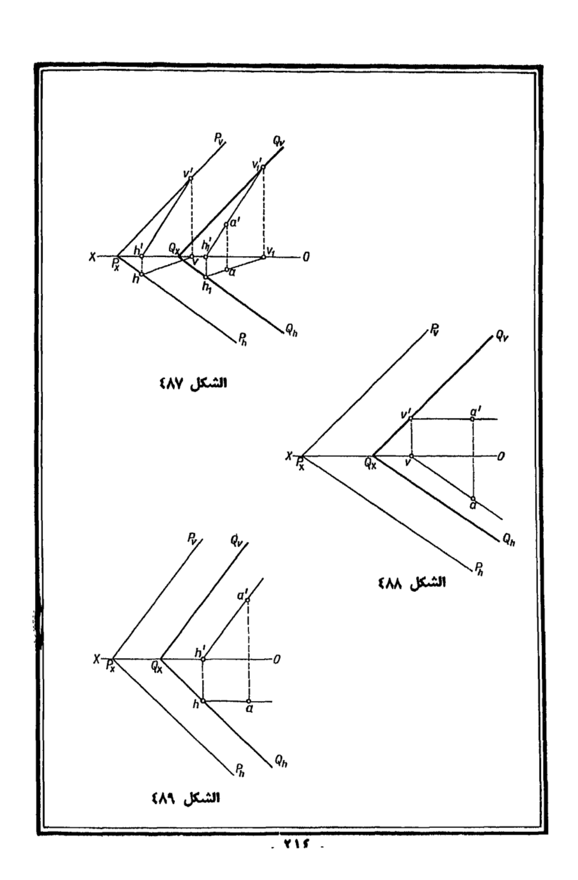
● **المثال ١٤٩ :** لدينا مستوي P ونقطة A . مرر من النقطة A مستوياً Q يوازي المستوي P (الشكل ٤٨٧ – ٤٨٩) .

الحل : يتلخص الحل العام لهذه المسألة برسم مستقيم مساعد من النقطة A مواز للمستوي المعطى P . (انظر المثال ١٣٩) ثم بضمه في مستوي يحقق شرط المسألة .

الطريقة الاولى : نأخذ في المستوي P مستقيماً ما (hv,h′v′) ثم نرسم من النقطة (a,a′) مستقيماً يوازيه . بإيجاد الأثرين (h_1,h_1') و (v_1,v_1') لهذا المستقيم نرسم منها أثري المستوي المطلوب Q : الأفقي (Q_h) من النقطة h_1 موازياً للأثر P_h ، والشاقولي (Q_v) – من النقطة v_1' موازياً للأثر P_v . عند حل المسألة بصورة صحيحة أثرا المستوي المطلوب Q_h و Q_v يجب أن يتقاطعا على خط الأرض في النقطة Q_x . من الأسهل حل هذه المسألة بمساعدة المستقيمات الرئيسية للمستوي الأفقية أو الجبهية .

الطريقة الثانية : نرسم من النقطة (a,a′) مستقيماً أفقياً في المستوي Q –


m'
c'
b'
k'
a'
d'
X
O
b
m
k
d
a
c
الشكل ٤٨١
Pv
Qv
X
Px
Qx
O
Ph
Qh
الشكل ٤٨٢
Qv
Pv
X
Qx
Px
O
Qh
Ph
الشكل ٤٨٣
Pv
Qv
a'
X
Px
Qx
O
a
Ph
Qh
الشكل ٤٨٤
Z
Qv
Pv
a'
a"
X
O
Y
Pw
Qw
a
Ph
Qh
Y
الشكل ٤٨٥
Pv
Qv
X
a'
Px
Qx
O
a
Ph
Qh
الشكل ٤٨٦



الشكل ٤٨٧

الشكل ٤٨٨

الشكل ٤٨٩

موازياً لمستقيم أفقي في المستوي P ، فمسقطه الأفقي يجب أن يمر من النقطة a موازياً للأثر P_h ، أما مسقطه الشاقولي فمن النقطة 'a موازياً لخط الأرض . بإيجاد الأثر (v,v') لهذا المستقيم الأفقي نرسم أثري المستوي المطلوب : أولاً الأثر الشاقولي (Q_v) من النقطة 'v ، موازياً للأثر P_v فيتقاطع مع خط الأرض في النقطة Q_x ، بعد ذلك نرسم من هذه النقطة الأثر الأفقي (Q_h) موازياً للأثر P_h .

الطريقة الثالثة : نمرر من النقطة (a,a') مستقيماً جبهياً في المستوي Q – موازياً لمستقيم جبهي ما في المستوي P . إن مسقطه الأفقي يجب أن يمر من النقطة a موازياً لخط الأرض ، أما مسقطه الشاقولي فمن النقطة 'a موازياً للأثر P_v . بإيجاد الأثر (h,h') لهذا المستقيم الجبهي نرسم أثري المستوي المطلوب : الأثر الأفقي (Q_h) – من النقطة h موازياً للأثر P_h فيتقاطع مع خط الأرض في النقطة Q_x ، بعد ذلك من هذه النقطة – الأثر الشاقولي (Q_v) موازياً للأثر P_v .

ملاحظة : ١ . من النقطة المفروضة يمكن أن نرسم مستقيماً أفقياً وآخر جبهياً في المستوي المطلوب دون رسم هذه المستقيمات في المستوي المعطى (لماذا ؟) .

٢ . أحياناً عند استعمال مستقيم أفقي أو جبهي تخرج النقطة Q_x من حدود الشكل ، في هذه الحالة نرسم أثري المستوي Q_h و Q_v بغض النظر عن النقطة Q_x ، لهذا نستعمل مستقيم أفقي وآخر جبهي .

● **المثال ١٥٠ :** لدينا نقطة A ومستوي معين بمستقيم BC ونقطة D . مرر من النقطة A مستوياً يوازي المستوي المفروض (الشكل ٤٩٠) .

الحل : نحول المستوي المفروض المعطى بمستقيم ونقطة إلى مستوي معين

بمستقيمين متقاطعين BCوDE . نمرر من النقطة (a,a′) المستقيمين (am,a′m′) و (an,a′n′) الموازيين على التوالي للمستقيمين (bc,b′c′) و (de,d′e′) . وهكذا يتعين المستوي المطلوب بالمستقيمين المتقاطعين AM و AN . يمكن تعيين هذا المستوي بأثريه (كيف ؟) .

● **المثال ١٥١ :** لدينا نقطة A ومستوي معين بمستقيمين متوازيين BC و DE . مرر من النقطة A مستوياً يوازي المستوي المفروض (الشكل ٤٩١) .

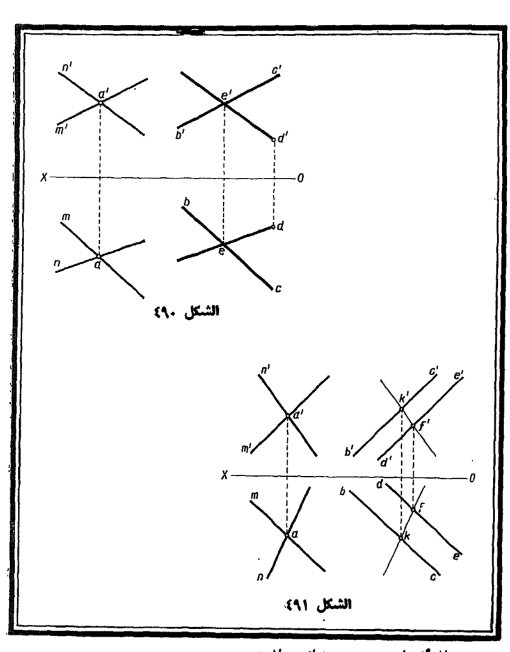
الحل : نرسم مستقيماً ما (fk , f′k′) في المستوي المفروض (لماذا ؟) بعد ذلك نرسم من النقطة (a,a′) المستقيمين (am,a′m′) و (an,a′n′) الموازيين للمستقيمين (bc,b′c′) أو (de,d′e′) و (fk , f′k′) .

● **المثال ١٥٢ :** لدينا مثلث ABC ومستوي P . هل يوازي مستوي المثلث المستوي P (الشكل ٤٩٢) ؟

الحل : يمكن حل المسألة بطريقتين :

الطريقة الاولى : نوجد أولاً أثري مستوي المثلث ، ثم باستخدام نظرية توضع الآثار المتماثلة لمستويين نبين وضعية هذين المستويين .

الطريقة الثانية : استناداً إلى امكانية رسم مستقيمات متوازية في المستويات المتوازية ، نرسم مستقيماً أفقياً اختيارياً في المستوي P وآخر في مستوي المثلث ، فاذا توازى المستقيمان الأفقيان نرسم مستقيمين آخرين جبهيين في نفس المستويين السابقين . إذا كان المستقيمان الجبهيان أيضاً متوازيين فالمستويان سيكونان متوازيين. أما إذا كان المستقيمان الرئيسيان (الافقيان أو الجبهيان) غير متوازيين عندها نكف



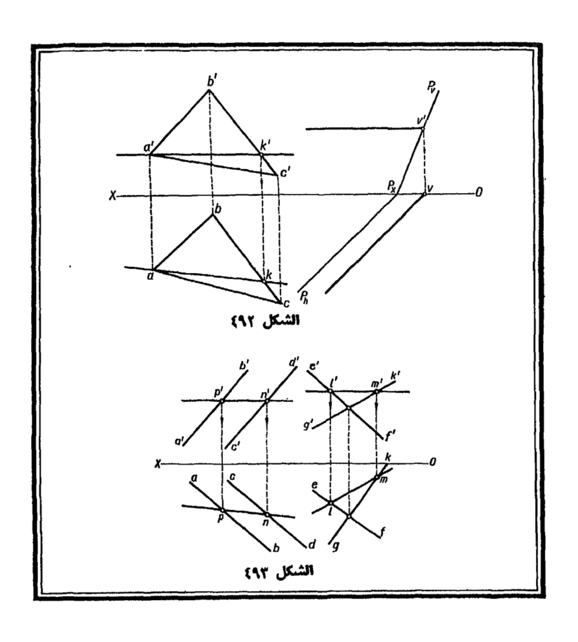
الشكل ٤٩٠

الشكل ٤٩١

عن حل المسألة لوضوح عدم توازي المستويين .

في هذه المسألة نلاحظ أن المستوي P ومستوي المثلث غير متوازيين فيما بينهما.

ملاحظة : من الشكل نلاحظ أنه يمكن عدم رسم مستقيم أفقي (جبهي) (لماذا) ؟



الشكل ٤٩٢

الشكل ٤٩٣

● **المثال ١٥٣ :** هل المستويان التاليان متوازيان ؟ الاول معـــين بمستقيمين متوازيين AB و CD والثاني معين بمستقيمين متقاطعين EF و GK (الشكل ٤٩٣).

الحل : نحل المسألة بدون إيجاد آثار المستويين . نرسم في المستويين المفروضين مستقيمين ما أفقيين . بما أن المستقيمين الأفقيين في المستويين غير متوازيين فالمستويان غير متوازيين .

مسائل

٢٢٣ـ مرر من النقطة A مستقيماً يوازي المستوي P (الشكل ٤٩٤) .

٢٢٤ ـ مرر من النقطة A مستقيماً يوازي المستوي المعين بمستقيم BC ونقطة D (الشكل ٤٩٥) .

٢٢٥ ـ مرر من النقطة A مستقيماً يوازي المستوي المعين بمستقيمين متوازيين BC و DE (الشكل ٤٩٦) .

٢٢٦ ـ مرر من النقطة A مستقيماً يوازي مستوي المثلث BCD (الشكل ٤٩٧) .

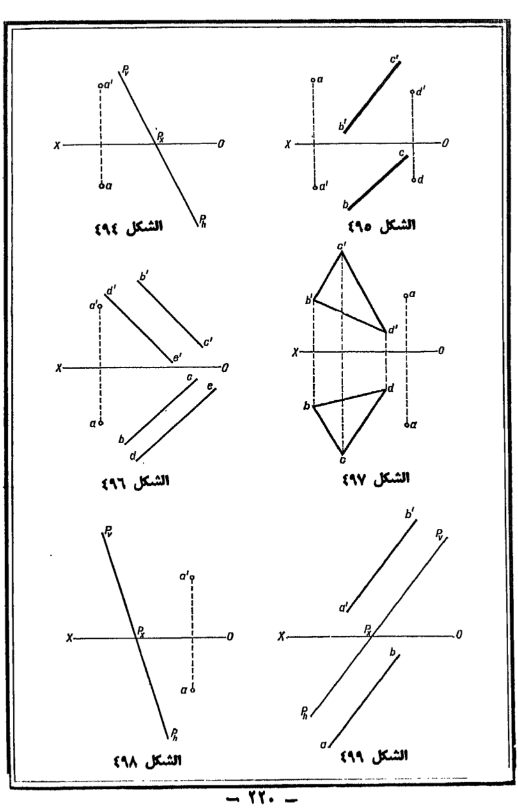
٢٢٧ ـ مرر من النقطة A مستقيماً يوازي المستوي P ويميل على مستويات الإسقاط بمقدار واحد (الشكل ٤٩٨) .

٢٢٨ ـ هل المستقيم AB والمستوي P متوازيان (الشكل ٤٩٩) ؟

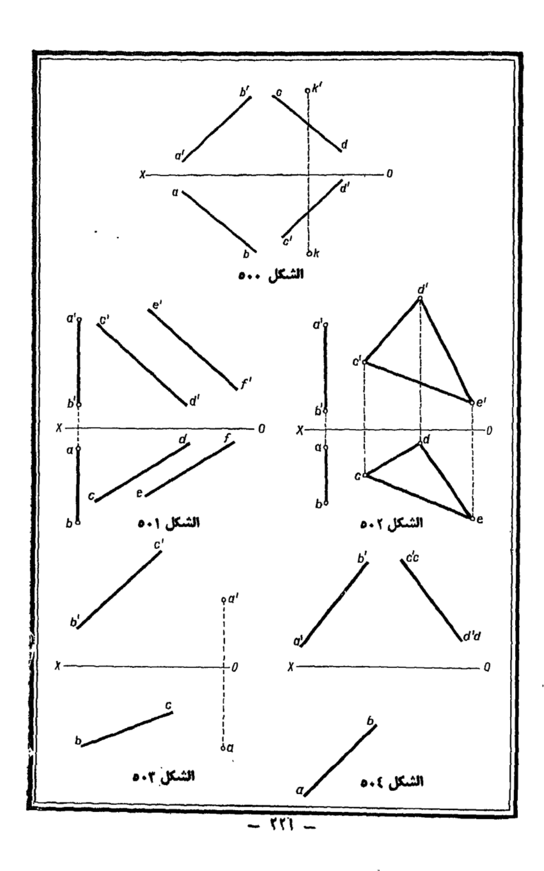
٢٢٩ ـ هل المستقيم AB والمستوي المعين بمستقيم CD ونقطة K متوازيان (الشكل ٥٠٠) ؟

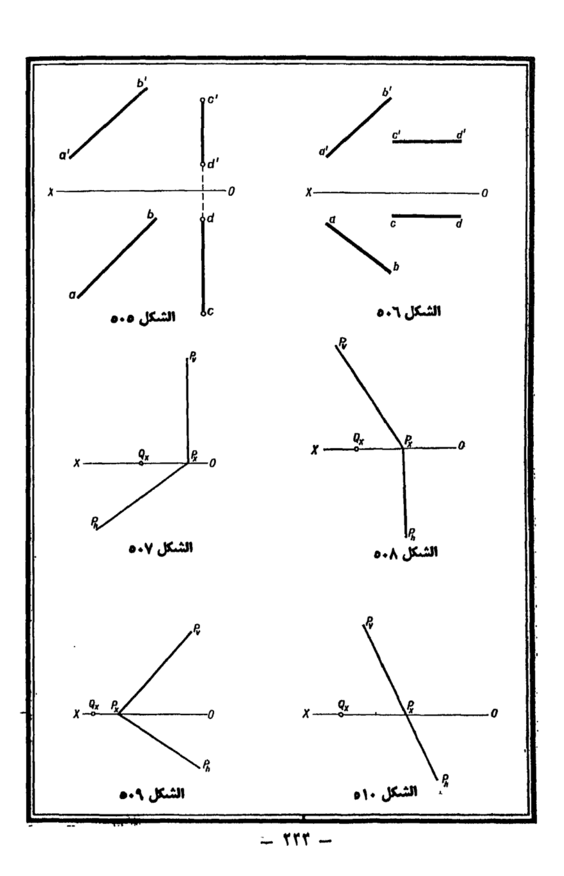
٢٣٠ ـ هل المستقيم AB والمستوي المعين بمستقيمين متوازيين CD و EF متوازيان (الشكل ٥٠١) ؟

٢٣١ ـ هل المستقيم AB ومستوي المثلث CDE متوازيان (الشكل ٥٠٢) ؟



P_v
a'
X
P_x
0
a
P_h
الشكل ٤٩٤
c'
a
d'
b'
X
0
c
d
a'
b
الشكل ٤٩٥
b'
d'
a'
c'
e'
X
0
c
e
a
b
d
الشكل ٤٩٦
c'
b'
a
d'
X
0
d
b
a
c
الشكل ٤٩٧
P_v
a'
X
P_x
0
a
P_h
الشكل ٤٩٨
b'
P_v
a'
X
P_x
0
b
P_h
a
الشكل ٤٩٩


b'
c
k'
a'
d
X
0
a
d'
c'
b
k
الشكل ٥٠٠
a'
c'
e'
f'
b'
d'
X
0
a
d
f
c
e
b
الشكل ٥٠١
d'
a'
c'
e'
b'
X
0
a
d
c
b
e
الشكل ٥٠٢
c'
a'
b'
X
0
c
b
a
الشكل ٥٠٣
b'
c'c
a'
d'd
X
0
b
a
الشكل ٥٠٤



الشكل ٥٠٥

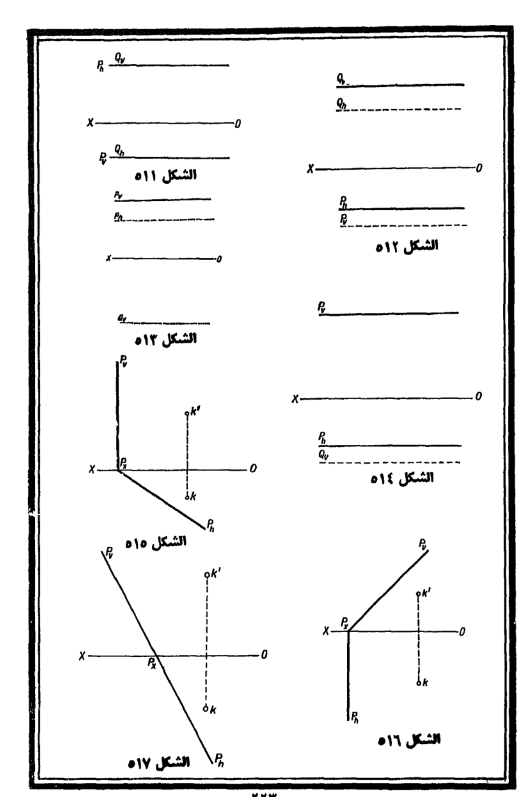
الشكل ٥٠٦

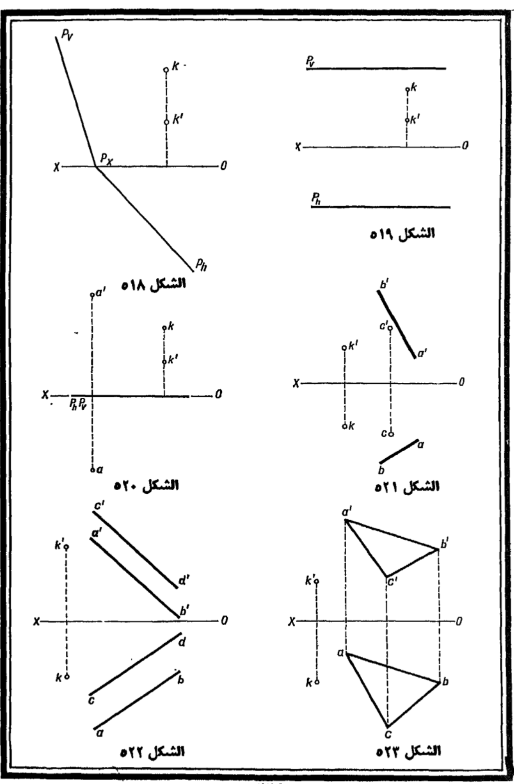
الشكل ٥٠٧

الشكل ٥٠٨

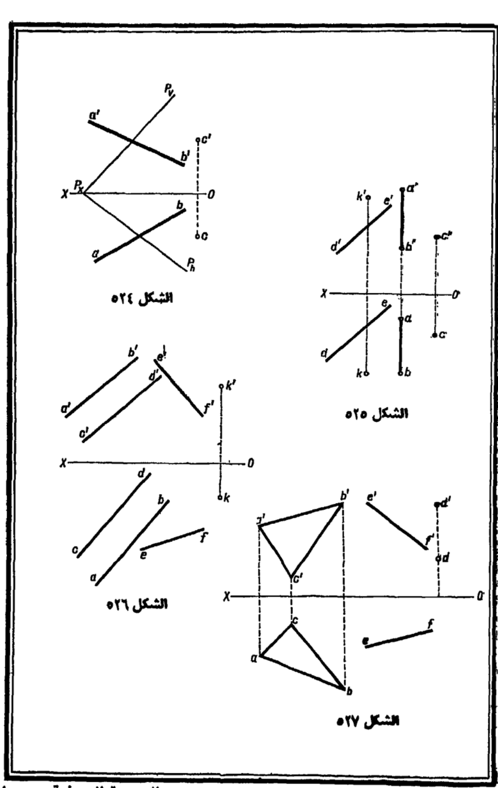
الشكل ٥٠٩

الشكل ٥١٠


P_h Q_v
X
O
P_v Q_h
الشكل ١١ه
Q_v
Q_h
X
O
P_h
P_v
الشكل ١٢ه
P_v
P_h
x
o
Q_v
الشكل ١٣ه
P_v
X
O
P_h
Q_v
الشكل ١٤ه
P_v
k'
X
P_x
O
k
P_h
الشكل ١٥ه
P_v
k'
X
P_x
O
k
P_h
الشكل ١٦ه
P_v
k'
X
P_x
O
k
الشكل ١٧ه
P_h



P_V
k
k'
X
P_X
0
P_h
الشكل ٥١٨
P_V
k
k'
X
0
P_h
الشكل ٥١٩
a'
k
k'
X
$P_h P_V$
0
a
الشكل ٥٢٠
b'
c'
k'
a'
X
0
k
c
a
b
الشكل ٥٢١
c'
a'
k'
d'
b'
X
0
d
k
b
c
a
الشكل ٥٢٢
a'
b'
k'
c'
X
0
a
k
b
c
الشكل ٥٢٣

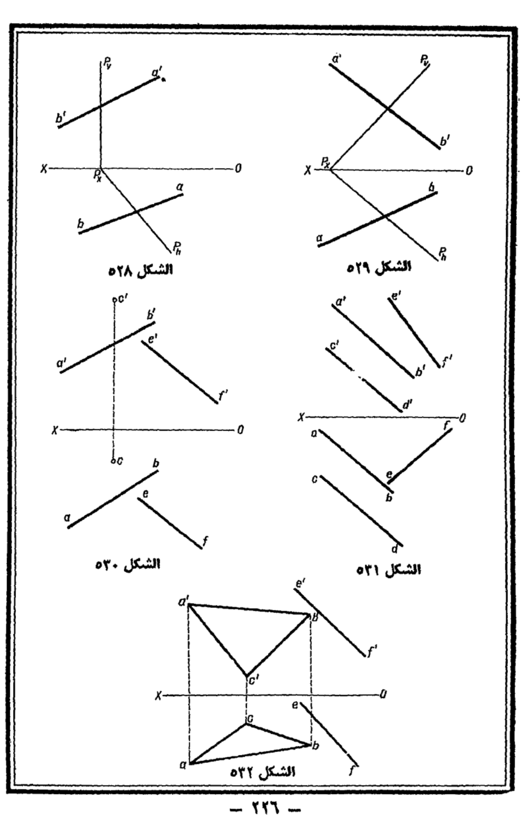


الشكل ٥٢٤

الشكل ٥٢٥

الشكل ٥٢٦

الشكل ٥٢٧



الشكل ٥٢٨

الشكل ٥٢٩

الشكل ٥٣٠

الشكل ٥٣١

الشكل ٥٣٢

٢٣٢ – مرر من النقطة A مستوياً Q عمودياً على مستوي الإسقاط الأفقي وموازياً للمستقيم BC (الشكل ٥٠٣) .

٢٣٣ – مرر من المستقيم AB مستوياً P يوازي المستقيم CD (الشكل ٥٠٤) .

٢٣٤ – مرر من المستقيمين AB و CD مستويين متوازيين P و Q (الشكل ٥٠٥، ٥٠٦) .

٢٣٥ – أرسم أثري المستوي Q الموازي للمستوي P إذا عرفت نقطة إلتقاء أثريه Q_x (الشكل ٥٠٧ – ٥١٠) .

٢٣٦ – بيّن هل المستويان P و Q متوازيان (الشكل ٥١١ ، ٥١٢) ؟

١ – باستعمال مستوي الإسقاط الجنبي .

٢ – بدون استعمال مستوي الإسقاط الجنبي .

٢٣٧ – أوجد الأثر الناقص للمستوي Q من شرط توازي المستويين P و Q فيما بينهما (الشكل ٥١٣ ، ٥١٤) :

١ – باستعمال مستوي الإسقاط الجنبي .

٢ – بدون استعمال مستوي الإسقاط الجنبي .

٣٣٨ – ارسم أثري مستوي يمر من النقطة K ويوازي المستوي P (الشكل ٥١٥–٥١٨).

٢٣٩ – ارسم أثري مستوي يمر من النقطة K ويوازي المستوي P (الشكل ٥١٩ ، ٥٢٠).

١ – باستعمال مستوي الإسقاط الجنبي .

٢ – بدون استعمال مستوي الإسقاط الجنبي .

٢٤٠ – مرر من النقطة K مستوياً يوازي المستوي المعين بمستقيم AB ونقطة C (الشكل ٥٢١) .

٢٤١ – مرر من النقطة K مستوياً يوازي المستوي المعين بمستقيمين متوازيين AB و CD (الشكل ٥٢٢) .

٢٤٢ – مرر من النقطة K مستوياً يوازي مستوي المثلث ABC (الشكل ٥٢٣) .

ملحوظة : في المسائل ٢٤١،٢٤٢،٢٤٣ ارسم المستوي المنشود بأثريه وبدونها .

٢٤٣ – مرر من النقطة C مستقيماً يقطع المستقيم AB ويوازي المستوي P (الشكل ٥٢٤) .

٢٤٤ – مرر من النقطة C مستقيماً يقطع المستقيم AB ويوازي المستوي المعين بمستقيم DE ونقطة K (الشكل ٥٢٥) .

٢٤٥ – مرر من النقطة K مستقيماً يقع المستقيم EF ويوازي المستوي المعين بمستقيمين متوازيين AB و CD (الشكل ٥٢٦) .

٢٤٦ – مرر من النقطة D مستقيماً يقطع المستقيم EF ويوازي مستوي المثلث ABC (الشكل ٥٢٧) .

٢٤٧ – ارسم مستوياً Q يوازي المستوي P بحيث أن طول قطعة المستقيم AB المحصورة بين المستويين يساوي 20 mm (الشكل ٥٢٨ ، ٥٢٩) .

٢٤٨ – ارسم مستوياً P يوازي المستوي المعين بمستقيم AB ونقطة C بحيث أن طول قطعة المستقيم EF المحصورة بين المستويين يساوي 25 mm (الشكل ٥٣٠).

٢٤٩ – ارسم مستوياً P يوازي المستوي المعين بمستقيمين متوازيين AB و CD بحيث يكون طول قطعة المستقيم EF المحصورة بين المستويين مساوياً 30 mm (الشكل ٥٣١) .

٢٥٠ – ارسم مستوياً P يوازي مستوي المثلث ABC بحيث يكون طول قطعة المستقيم EF المحصورة بين المستويين مساوياً 30 mm (الشكل ٥٣٢) .

البحث السادس عشر

تعامد مستقيم مع مستوي

تعامد المستويات

إذا كان المستقيم عمودياً على مستوي معين بأثريه فسقطا هذا المستقيم سيتعامدان مع الأثرين الموافقين للمستوي. بالإضافة إلى ذلك المسقط الأفقي للمستقيم عمودي على المسقط الأفقي للمستقيم الأفقي لذلك المستوي (لماذا ؟) ، كما ان المسقط الشاقولي للمستقيم عمودي على المسقط الشاقولي للمستقيم الجبهي لذلك المستوي (لماذا ؟).

إن خاصة مساقط المستقيات الرئيسية للمستوي المتعامد مع مستقيم تستعمل لـ :

١ – توضيح تعامد مستقيم مع مستوي غير معطى بأثريه بدون تعيين أثري ذلك المستوي .

٢ – إسقاط عمود من نقطة على مستوي غير معطى بأثريه .

النظرية العكسية ليست دائماً صحيحة في الجملة (H , V) .

إستثناء : يكون المستقيم عمودياً على مستوي يوازي خط الأرض إذا كان أيضاً المسقط الجنبي للمستقيم عمودياً على الأثر الجنبي للمستوي .

يتعامد المستويان P وQ إذا كان المستوي P حاوياً على مستقيم عمودي على المستوي Q .

أمثلـــة

● **المثال ١٥٤ :** لدينا مستوي P ونقطة A . أسقط من النقطة A عموداً على المستوي P (الشكل ٥٣٣) .

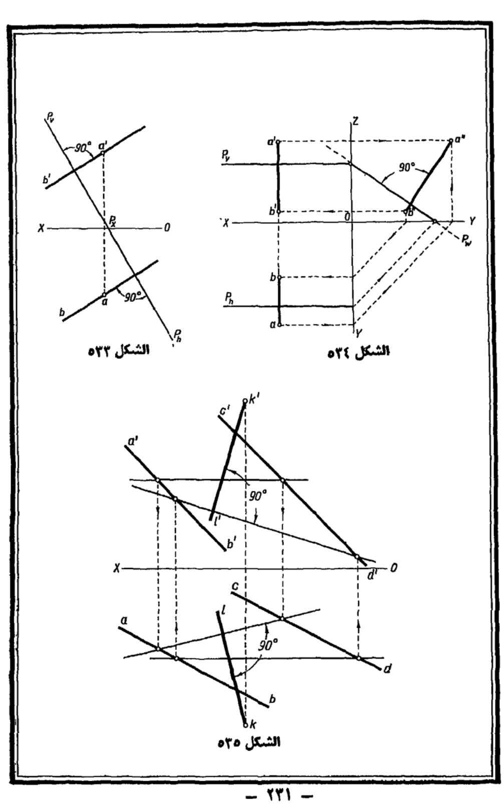
الحل : نرسم من مسقطي النقطة المفروضة (a،a′) مسقطي المستقيم المطلوب بصورة عمودية على الأثرين الموافقين للمستوي أي $ab \perp P_h$ و $a'b' \perp P_v$.

● **المثال ١٥٥ :** لدينا مستوي P ونقطة A . أسقط من النقطة A عموداً على المستوي P (الشكل ٥٣٤) .

الحل : إن المستقيم المطلوب جنبي مسقطاه يجب أن يمرا من مسقطي النقطة الموافقين (a،a′) ، كما يجب أن يكونا عموديين على الأثرين الموافقين للمستوي . ولكن يجب ان لاننسى أن لأي مستقيم جنبي حتى ولو كان غير عمودي على مستوي موازي لخط الأرض يكون المسقط الأفقي والشاقولي على المخطط دائماً عموديين على أثري المستوي .

لهذا يجب أن نبدأ حل المسألة بمساعدة مستوي الإسقاط الجنبي لنؤمن الوضعيـــة العمودية للمسقط الجنبي للمستقيم المطلوب بالنسبة للأثر الجنبي للمستوي ، بعد ذلك بمساعـــدة المسقط الجنبي للمستقيم نوجـــد مسقطيه الآخرين . وهكذا نعين الأثر الجنبي (P_w) للمستوي ، والمسقط الجنبي (a″) للنقطة . نسقط عموداً من a″ على الأثر P_w ثم نحدد المسقط الجنبي للمستقيم بقطعة ما a″b″ بعدها نعين المسقطين الآخرين : الأفقي (ab) والشاقولي (a′b′) .

● **المثال ١٥٦ :** لدينا مستوي معين بمستقيمين متوازيين AB و CD ونقطة K . أسقط عموداً من النقطة K على ذلك المستوي (الشكل ٥٣٥) .



الشكل ٥٣٣

الشكل ٥٣٤

الشكل ٥٣٥

الحل : نوسم أولاً مستقيماً أفقياً ما وآخر جبهياً في المستوي المفروض . بعد ذلك نوسم مسقطي العمود : الأفقي (kl) من النقطة k عمودياً على المسقط الأفقي للمستقيم الأفقي (لماذا؟) والشاقولي $k'l'$ من النقطة k' عمودياً على المسقط الشاقولي للمستقيم الجبهي (لماذا؟) .

● **المثال ١٥٧ :** لدينا مستوي P ونقطة A . عين بعد النقطة عن المستوي (الشكل ٥٣٦) .

الحل : من المعلوم أن بعد نقطة عن مستوي يقاس بقطعة العمود المحصورة بين النقطة وأساس العمود على المستوي . نسقط عموداً من النقطة (a,a') على المستوي P ونوجد نقطة الأساس (b,b') أي نقطة تقاطع العمود مع المستوي

بما أن القطعة ($ab,a'b'$) موازية لمستوي الإسقاط الأفقي فالمسقط الأفقي (ab) سيعطينا الطول الحقيقي .

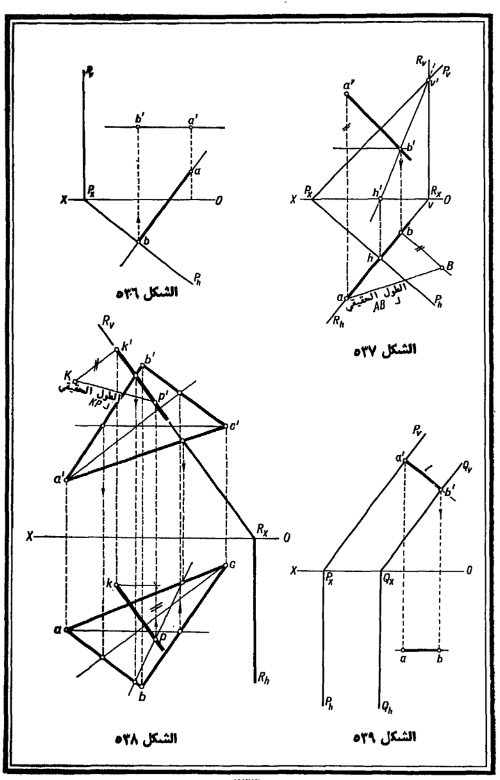
نتيجة : يقاس البعد بين نقطة ما ومستوي شاقولي (على المخطط) بالبعد بين المسقط الأفقي للنقطة والأثر الأفقي للمستوي .

بصورة مشابهة يمكن أن نستنتج مايلي :

١ ـ يقاس بعد نقطة ما عن مستوي أمامي (على المخطط) بالبعد بين المسقط الشاقولي للنقطة والأثر الشاقولي للمستوي .

٢ ـ يقاس بعد نقطة ما عن مستوي موازي لخط الأرض (على المخطط) بالبعد بين المسقط الجنبي للنقطة والأثر الجنبي للمستوي .

● **المثال ١٥٨ :** لدينا مستوي P ونقطة A . عن البعد بين النقطة والمستوي (الشكل ٥٣٧) .

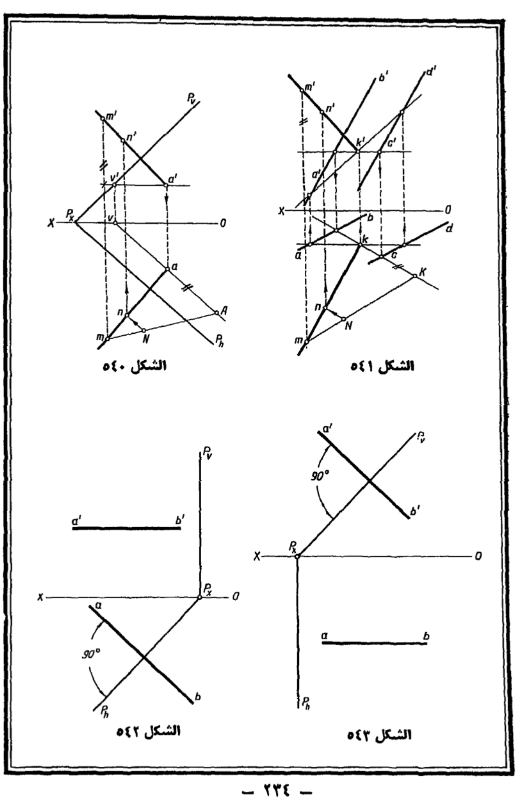


الشكل ٥٣٦

الشكل ٥٣٧

الشكل ٥٣٨

الشكل ٥٣٩



الشكل ٥٤٠

الشكل ٥٤١

الشكل ٥٤٢

الشكل ٥٤٣

الحل : نسقط من النقطة (a,a′) عموداً على المستوي P ثم نوجد أساسه على المستوي ، لهذا نبحث عن النقطة (b,b′) نقطة تقاطع العمود مـــع المستوي . بتعيين مسقطي القطعة (ab,a′b′) ، نعين طولها الحقيقي .

● **المثال ١٥٩ :** لدينا مثلث ABC ونقطة K . عين بعد النقطة عن مستوي المثلث (الشكل ٥٣٨) .

الحل : نسقط من النقطة المفروضة (k,k′) عموداً على مستوي المثلث (انظر المثال ١٥٦) ثم نوجد النقطة (p,p′) أساس العمود ونعين الطول الحقيقي لقطعة العمود (kp,k′p′) .

● **المثال ١٦٠ :** لدينا مستويان متوازيان P و Q . عين البعد بينهما (الشكل ٥٣٩).

الحل : تتلخص فكرة الحل بأخذ نقطة ما على أحد المستويين ثم تعيين بعدها عن المستوي الآخر (انظر المثال ١٥٧) .

نتيجة : يقاس البعد بين مستويين أماميين متوازيين (على المخطط) بالبعد بين أثريهما الشاقوليين

بصورة مشابهة يقاس البعد بين مستويين شاقوليين متوازيين (على المخطط) بالبعد بين أثريهما الأفقيين .

يقاس البعـد بين مستويين موازيين لخط الأرض (على المخطط) بالبعـد بين أثريهما الجنبيين .

● **المثال ١٦١ :** لدينا مستوي P ونقطة A من هذا المستوي (معينة بمسقطها الشاقولي) . إرفع من النقطة A عموداً على المستوي طوله $l$mm (الشكل ٥٤٠) .

الحل : نوجـد المسقط الأفقي (a) للنقطة المفروضة ، مثلاً بمساعدة مستقيم

أفقي . ثم نرسم مسقطي العمود على المستوي من النقطة (a,a′) . بتحديد قطعة منه (am,a′m′) نرسم هذه القطعة بطولها الحقيقي ثم نأخذ عليها قطعة AN بطول $l$mm وبعد ذلك نوجد مسقطيها (a′n′ و an) .

● **المثال ١٦٢ :** لدينا مستوي معين بمستقيم AB ونقطة C ، ولدينا أيضاً نقطة K من هذا المستوي (معينة بمسقطها الأفقي) . ارفع من النقطة K عموداً على المستوي طوله $l$mm . (الشكل ٥٤١) .

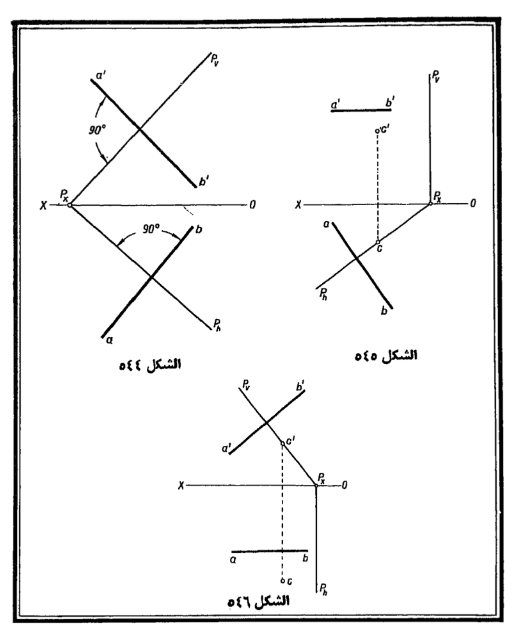
الحل : نحول المستوي المفروض إلى مستوي معين بمستقيمين متوازيين AB و CD . لنوجد بمساعدة مستقيم جبهي المسقط الشاقولي (k′) للنقطة المفروضة ، بعد ذلك نرسم من النقطة (k,k′) مستقيماً أفقياً في المستوي ثم نرسم مسقطي العمود : الأفقي – عمودياً على المسقط الأفقي للمستقيم الأفقي ، والشاقولي – عمودياً على المسقط الشاقولي للمستقيم الجبهي للمستوي . نحدد العمود بقطعة (km،k′m′) ونرسم هذه القطعة بطولها الحقيقي ثم نأخذ عليها قطعة KN تساوي $l$mm . بعد ذلك نوجد مسقطيها . (kn،k′n′)

● **المثال ١٦٣:** لدينا مستقيم AB ونقطة P_x . ارسم أثري المستوي P العمودي على المستقيم AB (الشكل ٥٤٢) .

الحل : المستوي المطلوب شاقولي . نرسم أثريه من النقطة P_x : **الأفقي** (P_h) – عمودياً على المستقيم ab ، والشاقولي (P_v) – عمودياً على المستقيم a′b′ .

● **المثال ١٦٤ :** لدينا مستقيم AB ونقطة P_x . ارسم أثري المستوي P العمودي على المستقيم AB (الشكل ٥٤٣) .

الحل : المستوي المطلوب أمامي . نرسم أثريه من النقطة P_x : الأفقي (P_h) –



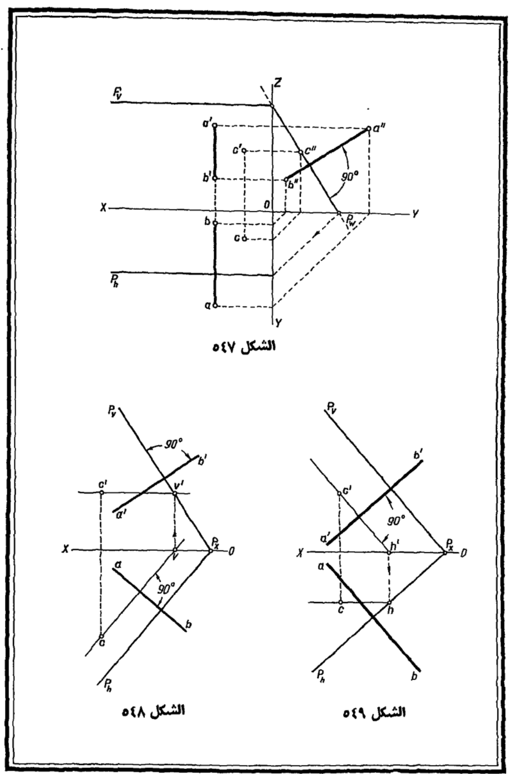
الشكل ٥٤٤

الشكل ٥٤٥

الشكل ٥٤٦

عمودياً على المستقيم ab ، والشاقولي (P_v) ـعمودياً على المستقيم a'b' .

● **المثال ١٦٥** :لدينا مستقيم AB ونقطة P_x . ارسم أثري المستوي P العمودي على المستقيم AB (الشكل ٥٤٤)



الشكل ٥٤٧

الشكل ٥٤٨

الشكل ٥٤٩

الحل : المستوي المطلوب كيفي . نرسم أثريه من P_x : الأفقي (P_h) – عمودياً على المستقيم ab والشاقولي (P_v) – عمودياً على المستقيم a′b′ .

● **المثال ١٦٦ :** لدينا مستقيم AB ونقطة C . مرر من النقطة C مستوياً P عمودياً على المستقيم AB (الشكل ٥٤٥) .

الحل : المستوي المطلوب شاقولي . بما أن هذا المستوي يجب أن يمر من النقطة (c,c′) لذلك نرسم أولاً أثره الأفقي (P_h) من النقطة c ـ عمودياً على المستقيم ab فيتقاطع مع خط الأرض في النقطة P_x ، بعـــد ذلك نرسم الأثر الشاقولي (P_v) من هذه النقطة عمودياً على المستقيم a′b′ .

ملاحظة : إذا خرجت النقطة P_x من حدود الشكل فعندها لالزوم لرسم الأثر الشاقولي للمستوي (لماذا ؟).

● **المثال ١٦٧ :** لدينا مستقيم AB ونقطة C . مرر من النقطة C مستوياً P عمودياً على المستقيم AB (الشكل ٥٤٦) .

الحل : المستقيم المطلوب أمامي . بما أن هذا المستوي يجب أن يمر من النقطة (c,c′) لذلك نرسم أولاً أثره الشاقولي (P_v) من النقطة c′ عمودياً على المستقيم a′b′ فيقطع خط الأرض في النقطة P_x . بعد ذلك نرسم الأثر الأفقي (P_h) من تلك النقطة عمودياً على المستقيم ab .

ملاحظة : إذا خرجت النقطة P_x من حدود الشكل فعندها لا لزوم لرسم الأثر الأفقي للمستوي (لماذا ؟) .

● **المثال ١٦٨ :** لدينا مستقيم AB ونقطة C . مرر من هـذه النقطـة مستوياً P عمودياً على المستقيم AB (الشكل ٥٤٧) .

الحل : المستوي المطلوب موازي لخط الأرض . نوجد المسقط الجنبي $(a''b'')$ للمستقيم ، والمسقط الجنبي (c'') للنقطة . بما أن هذا المستوي يجب أن يمر من النقطة (c,c') لذلك نرسم الأثر الجنبي (P_w) للمستوي من النقطة c'' عمودياً على المستقيم $a''b''$ ، بعد ذلك نوجد الأثرين الآخرين (P_vوP_h) للمستوي بمساعدة P_w .

● **المثال ١٦٩** : لدينا مستقيم AB ونقطة C . مرر من النقطة مستوياً P عمودياً على المستقيم (الشكل ٥٤٨ ، ٥٤٩) .

الحل : **الطريقة الأولى** : لنرسم مسقطي مستقيم أفقي ما في المستوي المطلوب من المسقطين الموافقين للنقطة المفروضة : الشاقولي من النقطة c' موازياً لخط الأرض والأفقي من النقطة c عمودياً على المستقيم ab .

بإيجاد الأثر (v,v') للمستقيم الأفقي نرسم أثري المستوي : أولاً الشاقولي (P_v) من النقطة v' عمودياً على المستقيم $a'b'$ فيقطع خط الأرض في P_x ، بعد ذلك الأفقي (P_h) من النقطة P_x عمودياً على مستقيم ab .

الطريقة الثانية : نرسم مسقطي مستقيم جبهي ما في المستوي P من مسقطي النقطة المفروضة : الأفقي من النقطة c موازياً لخط الأرض والشاقولي من النقطة c' عمودياً على المستقيم $a'b'$. بإيجاد الأثر (h,h') للمستقيم الجبهي نرسم أثري المستوي : أولاً الأفقي (P_h) من النقطة h عمودياً على المستقيم ab فيقطع خط الأرض في النقطة P_x ، بعد ذلك الشاقولي (P_v) من النقطة P_x عمودياً على المستقيم $a'b'$.

ملاحظة : أحياناً عند استعمال مستقيم أفقي أو جبهي تخرج النقطة P_x من حدود الشكل . في هذه الحالة نرسم أثري المستوي P_vوP_h كلاً على انفراد ولهذا نستعمل مستقيماً جبهياً وآخر أفقياً .

● **المثال ١٧٠ :** لدينا مستقيم AB ونقطة C . أسقط من النقطة C عموداً على المستقيم AB (الشكل ٥٥٠) .

عندما يكون المستقيم المفروض موازياً لأحد مستويات الإسقاط (أفقيـــاً أو جبهياً) فإنه يمكننا أن نسقط عموداً من النقطـــة على المستقيم بصورة مباشرة . أما في الحالة العامة فاننا نحل المسألة بالشكل التالي :

نرسم من النقطة المفروضة (c,c′) مستوياً P عمودياً على المستقيم (ab,a′b′) ثم نوجد نقطة تقاطعهما (k,k′) . المستقيم المار من النقطة (c,c′) و (k,k′) هو المستقيم المطلوب .

ملاحظة : لتعيين بعـد النقطة C عن المستقيم AB ينبغي تعيين طول القطعة CK .

● **المثال ١٧١ :** لدينا مستوي P ونقطة A . مرر من النقطة A مستوياً R عمودياً على المستوي المفروض (الشكل ٥٥١) .

الحل : إذا تطلب أن يكون المستوي R عمودياً على المستوي P فيجب أن يحتوي على مستقيم عمودي على ذلك المستوي . نرسم من النقطة (a,a′) مستقيماً عمودياً على المستوي P ونضمه في المستوي R فنحصل على مستوي عمودي على المستوي المفروض (المسألة غير معينة) .

نتيجة : يكون المستوي المار من نقطة والعمودي على مستوي آخر وحيداً إذا كان المستوي المطلوب شاقولياً أو أمامياً أو كيفياً ذا أثرين واقعين على استقامة واحدة (لماذا) ؟

● **المثال ١٧٢ :** لدينا مستقيم BA ومستوي P . مرر من المستقيم AB مستوياً عمودياً على المستوي المفروض P (الشكل ٥٥٢) .

الحل : من نقطة ما (k,k′) من المستقيم المفروض نسقط عموداً على المستوي P . المستقيان المتقاطعان (ak,a′ k′) و (km,k′m′) يعينان المستوي المنشود .

● **المثال ١٧٣ :** لدينا مستقيم DE ومستوي معين بمستقيم AB ونقطة C . مرر من المستقيم مستوياً عمودياً على المستوي المفروض (الشكل ٥٥٣) .

الحل : نرسم من النقطة C مستقيماً أفقياً وآخر جبهياً في المستوي ، ثم نسقط من نقطة ما (k,k′) من المستقيم عموداً على المستوي . لهذا نرسم من النقطة k مستقيماً kf عمودياً على المسقط الأفقي للمستقيم الأفقي ثم نرسم من k′ مستقيماً k′f′ عمودياً على المسقط الشاقولي للمستقيم الجبهي . المستوي المطلوب معين بالمستقيمين المتقاطعين (ed،e′d′) و (kf ،k′f′) .

● **المثال ١٧٤ :** لدينا مستوي P . أنشيء المحل الهندسي لجميع النقاط التي تبعد عن المستوي المعين P بمقدار $l = 40$ mm . (الشكل ٥٥٤) .

الحل : المحل الهندسي المطلوب عبارة عن مستوي يوازي المستوي المفروض ويبعد عنه بمقدار $l = 40$ mm . ومنه نستنتج طريقة الإنشاء :

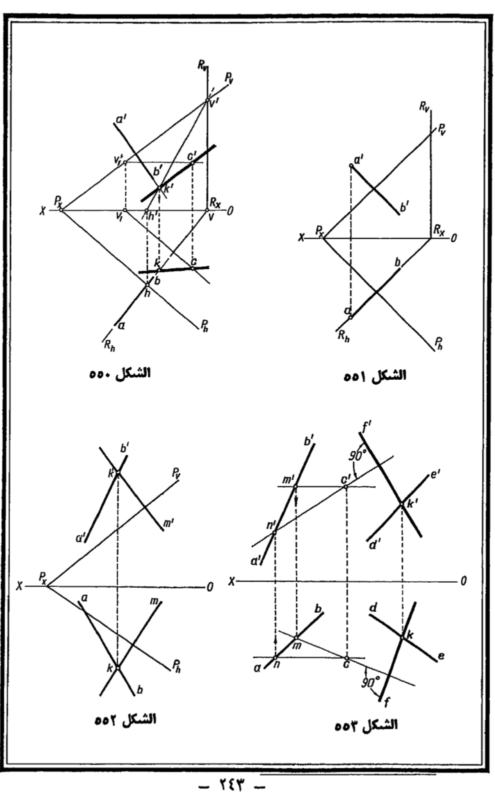
١ ــ نأخذ نقطة ما على المستوي المفروض .

٢ ــ نرفع من هذه النقطة عموداً على المستوي .

٣ ــ نأخذ على هذا العمود قطعة بطول $l = 40$ mm (يكفي إعطاء حل واحد) .

٤ ــ نرسم من نهاية العمود مستوياً يوازي المستوي المفروض .

على الطالب أن يقوم بعملية الإنشاء لوحده .

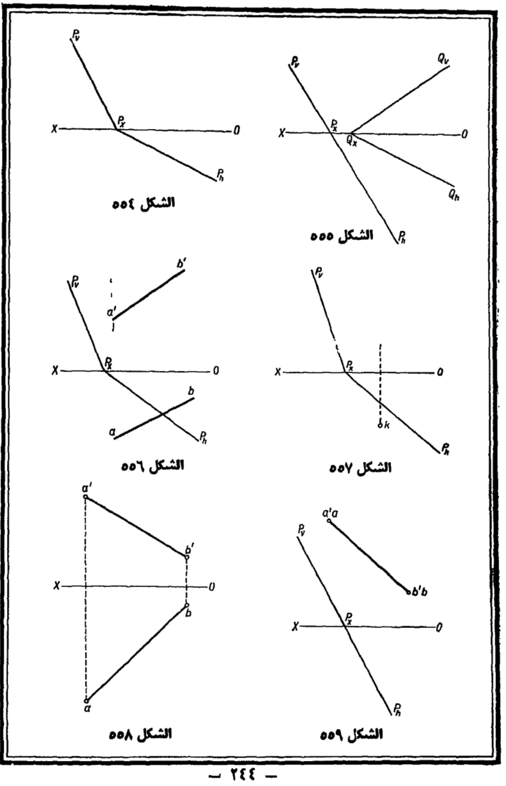


الشكل ٥٥٠

الشكل ٥٥١

الشكل ٥٥٢

الشكل ٥٥٣



الشكل ٥٥٤

الشكل ٥٥٥

الشكل ٥٥٦

الشكل ٥٥٧

الشكل ٥٥٨

الشكل ٥٥٩

● **المثال ١٧٥ :** أنشىء المحل الهندسي لجميع النقاط في المستوي P التي تبعد عن المستوي Q بمقدار $l = 40$ mm (الشكل ٥٥٥) .

الحل : المحل الهندسي المطلوب هو مستقيم تقاطع المستوي P مع المستوي R الموازي للمستوي المفروض Q والذي يبعد عنه بمقدار l . ومنه طريقة الإنشاء :

١ ـ نأخذ على المستوي Q نقطة ما .

٢ ـ نرفع من هذه النقطة عموداً على المستوي Q .

٣ ـ نأخذ على هذا العمود قطعة طولها $l = 40$ mm (يكفي حل واحد) .

٤ ـ نرسم من نهاية العمود مستوياً R يوازي Q .

٥ ـ نوجد الفصل المشترك للمستويين P و R الذي يشكل المحل الهندسي المطلوب .

● **المثال ١٧٦ :** أوجد على المستقيم AB نقطة تبعد عن المستوي P بمقدار $l = 40$ mm (الشكل ٥٥٦) .

الحل : إن النقطة المطلوبة هي نقطة تقاطع المستقيم AB مع المستوي R الموازي للمستوي P والذي يبعد عنه بمقدار $l = 40$ mm . ومنه طريقة الإنشاء :

١ ـ نأخذ على المستوي المفروض نقطة ما .

٢ ـ نرفع من هذه النقطة عموداً على المستوي .

٣ ـ نأخذ على هذا العمود قطعة طولها $l = 40$ mm (يكفي حل واحد)

٤ ـ نرسم من نهاية العمود مستوياً R يوازي P .

٥ ـ نوجد نقطة تقاطع المستقيم AB مع المستوي R .

● **المثال ١٧٧ :** أوجد المسقط الناقص للنقطة K التي تبعد عن المستوي P بمقدار $l = 40$ mm (الشكل ٥٥٧) .

الحل : نوجد المسقط المطلوب للنقطة K كمسقط ناقص لنقطة من المستوي R الموازي للمستوي المفروض والذي يبعد عنه بمقدار $l = 40\ mm$. ومنه طريقة الإنشاء :

١ ــ نأخذ في المستوي المفروض نقطة ما .

٢ ــ نرفع من هذه النقطة عموداً على المستوي .

٣ ــ نأخذ على العمود قطعة طولها $l = 40\ mm$ (يكفي حل واحد) .

٤ ــ نرسم من نهاية العمود مستوياً R يوازي المستوي P .

٥ ــ بواسطة المسقط المفروض للنقطة K من المستوي R نوجد المسقط الآخر.

● **المثال ١٧٨ :** انشيء المحل الهندسي لجميع نقاط الفراغ المتساوية الأبعاد عن نهايتي القطعة AB (الشكل ٥٥٨) .

الحل : المحل الهندسي المطلوب هو مستوي عمودي على القطعة ويمر من منتصفها ومنه نستنتج طريقة الإنشاء :

١ ــ ننصف القطعة بالنقطة K .

٢ ــ نرسم من هذه النقطة مستوياً عمودياً على القطعة المفروضة .

● **المثال ١٧٩ :** انشيء المحل الهندسي لجميع النقاط الواقعة في المستوي P والمتساوية الأبعاد عن طرفي القطعة AB (الشكل ٥٥٩) .

الحل : المحل الهندسي المطلوب هو مستقيم تقاطع المستوي P مع المستوي R العمودي على القطعة AB والمار من منتصفها .

ومنه طريقة الإنشاء :

١ ــ ننصف القطعة بالنقطة K .

٢ ــ نرسم من هذه النقطة مستوياً R عمودياً على القطعة المفروضة .

٣ ــ نوجد الفصل المشترك للمستويين P و R .

● **المثال ١٨٠ :** أوجد على المستقيم CD نقطة متساوية البعــد عـن طرفي القطعة AB (الشكل ٥٦٠) .

الحل : النقطة المطلوبة هي نقطة تقاطع المستقيم CD مع المستوي R العمودي على القطعة AB ، والمار من منتصفها .

ومنه طريقة الإنشاء :

١ ــ ننصف القطعة بالنقطة K .

٢ ــ نرسم من هذه النقطة مستوياً R عمودياً على القطعة المفروضة .

٣ ــ نوجد نقطة تقاطع المستقيم CD مع المستوي R .

● **المثال ١٨١ :** أوجد المسقط الناقص للنقطة K المتساوية البعـد عن نهايتي القطعة AB (الشكل ٥٦١) .

الحل : نعين المسقط المطلوب للنقطة K كمسقط ناقص لنقطة من المستوي R العمودي على القطعة AB والمار من منتصفها .

ومنه طريقة الإنشاء :

١ ــ ننصف القطعة AB بالنقطة M .

٢ ــ نمرر من هذه النقطة مستوياً R عمودياً على القطعة المفروضة .

٣ ــ نوجد المسقط الآخر للنقطة K من المستوي R بمساعدة المسقط المفروض.

● **المثال ١٨٢ :** أوجد على المستقيم AB نقطة تبعد عن النقطة K بمقدار $l = 40$ mm (الشكل ٥٦٢) .

الحل : في الحالة العامة لدينا نقطتان M و N تحققان الطلب تقعان في رأسي مثلث متساوي الساقين KMN قاعدته MN واقعة على المستقيم AB .

ومنه طريقة الإنشاء :

١ ــ نسقط من النقطة K عموداً على المستقيم AB ونوجد النقطة D ــ أساس العمود .

٢ ــ نعين الطول الحقيقي للإرتفاع KD وننشيء على حدة مثلثاً مساعداً بالأطوال الحقيقية KMN وبساقين طول كل منها $l = 40$ mm .

٣ ــ نأخذ على المستقيم AB واعتباراً من النقطة D القطعتين DM،DN . النقطتان M وN هما النقطتان المطلوبتان .

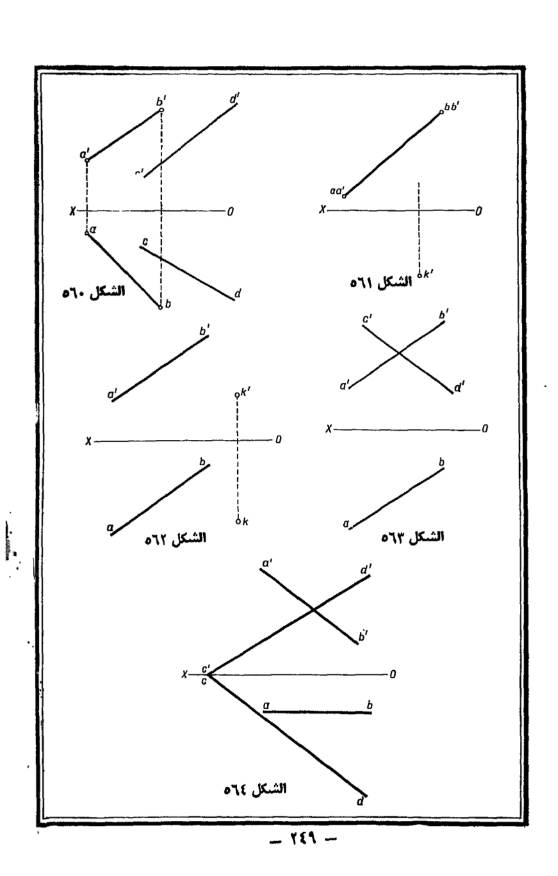
ماهي الحالات الممكنة الأخرى ؟

● **المثال ١٨٣ :** مرر من النقطة K مستقيماً يقطع المستقيم AB بزاوية معلومة φ (الشكل ٥٦٢) .

الحل : هناك مستقيمان يحققان الطلب KM،وKN وهما عبارة عن ساقي مثلث متساوي الساقين KMN قاعدته MN واقعة على المستقيم AB وزاوية قاعدته φ .

ومنه طريقة الإنشاء :

١ ــ نسقط من النقطة K عموداً على المستقيم AB ونوجد النقطة D ــ أساس العمود.



الشكل ٥٦٠

الشكل ٥٦١

الشكل ٥٦٢

الشكل ٥٦٣

الشكل ٥٦٤

٢ — نوجد الطول الحقيقي للإرتفاع KD ثم نرسم على حدة مثلثاً مساعداً KMN بأطواله الحقيقية وبزوايا قاعدة φ .

٣ — نأخذ على المستقيم AB إعتباراً من النقطة D القطعتين DM و DN ثم نرسم المستقيمين من النقاط M،K و N،K .

● **المثال ١٨٤ :** أوجد المسقط الناقص للمستقيم CD القاطع للمستقيم AB على أن يكون المستقيان متعامدين فيما بينهما (الشكل ٥٦٣) .

الحل : المحل الهندسي لجميع مستقيمات الفراغ التي تتعامد مع مستقيم ما وتقطعه ، هو مستوي R عمودي على هذا المستقيم ويمر من نقطة تقاطع المستقيمات .
نوجد المسقط المطلوب للمستقيم CD كمسقط ناقص لمستقيم ما واقع في المستوي R .
ومنه طريقة الإنشاء :

١ — نوجد مسقطي نقطة تقاطع المستقيمين .
٢ — نمرر من هذه النقطة مستوياً R عمودياً على المستقيم AB .
٣ — نوجد المسقط الآخر بمساعدة المسقط المعلوم المستقيم الواقع في المستوي R .

● **المثال ١٨٥ :** عين البعد بين مستقيمين متخالفين AB و CD الشكل ٥٦٤) .

الحل : البعد بين مستقيمين متخالفين هو البعد بين مستويين متوازيين مارين من هذين المستقيمين أو هو البعد بين أحد المستقيمين والمستوي المار من المستقيم الآخر والموازي للمستقيم الأول . ومنه طريقة الإنشاء :

١ — نرسم من المستقيم AB مستوياً يوازي المستقيم CD .
٢ — نأخذ على CD نقطة ما K .

٣ – نعين بعد هذه النقطة عن المستوي .

ملاحظة : وفق الطريقة السابقة يمكننا أن نعين فقط البعد بين المستقيمين المتخالفين المفروضين ولكن دون معرفة وضعية أقصر بعد بينها .

مسائل

٢٥١ – أسقط من النقطة K عموداً على المستوي P (الشكل ٥٦٥ – ٥٦٩) .

٢٥٢ – أسقط من النقطة K عموداً على مستوي المثلث ABC (الشكل ٥٧٠، ٥٧١) .

٢٥٣ – أسقط من النقطة K عموداً على مستوي المستقيمين المتوازيين AB وCD (الشكل ٥٧٢) .

٢٥٤ – أسقط من النقطة K عموداً على المستوي المعين بمستقيم AB ونقطة C (الشكل ٥٧٣) .

٢٥٥ – عيّن بعد النقطة K عن المستوي P (الشكل ٥٦٥ – ٥٦٩) .

٢٥٦ – عيّن بعد النقطة K عن مستوي المثلث ABC (الشكل ٥٧٠ ، ٥٧١) .

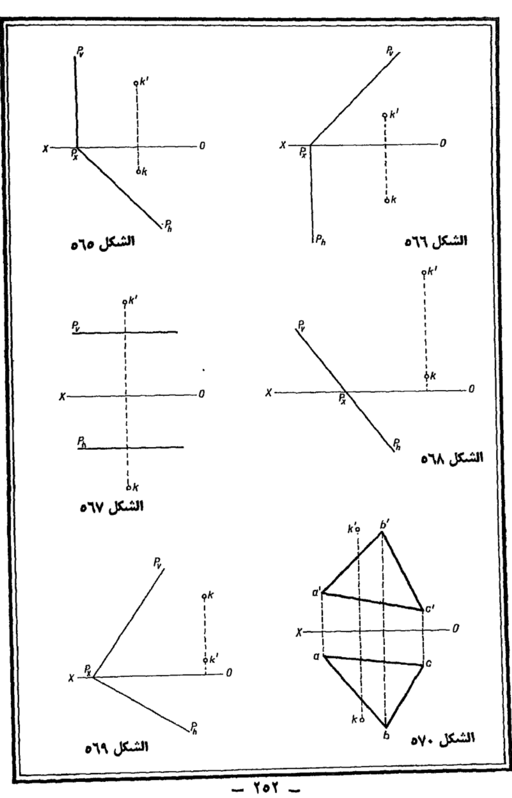
٢٥٧ – عيّن بعد النقطة K عن المستوي المعين بمستقيمين متوازيين AB و CD (الشكل ٥٧٢) .

٢٥٨ – عيّن بعد النقطة K عن المستوي المعين بمستقيم AB ونقطة C (الشكل ٥٧٣).

٢٥٩ – عيّن البعد بين المستويين المتوازيين P و Q (الشكل ٥٧٤ – ٥٧٧) .

٢٦٠ – عيّن البعد بين المستقيمين المتخالفين AB و CD (الشكل ٥٧٨) .

٢٦١ – عيّن الأثر الناقص للمستوي P على أن يكون بعده عن النقطة K 15 mm (الشكل ٥٧٩ – ٥٨١) .



الشكل ٥٦٥

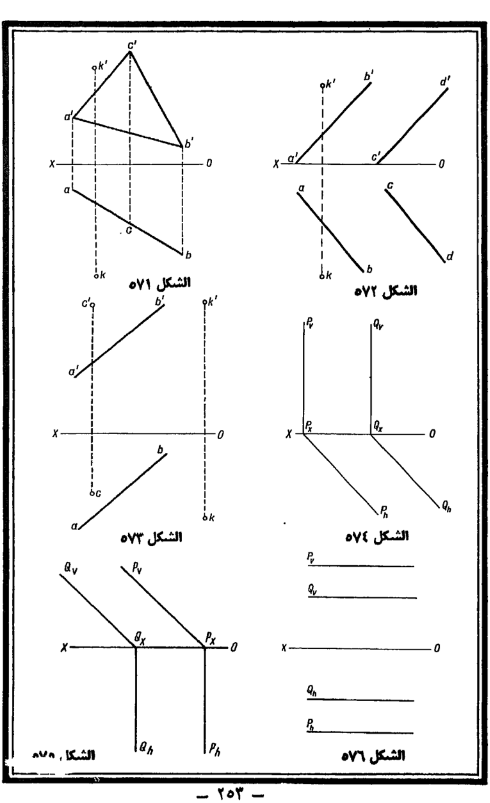
الشكل ٥٦٦

الشكل ٥٦٧

الشكل ٥٦٨

الشكل ٥٦٩

الشكل ٥٧٠



الشكل ٥٧١

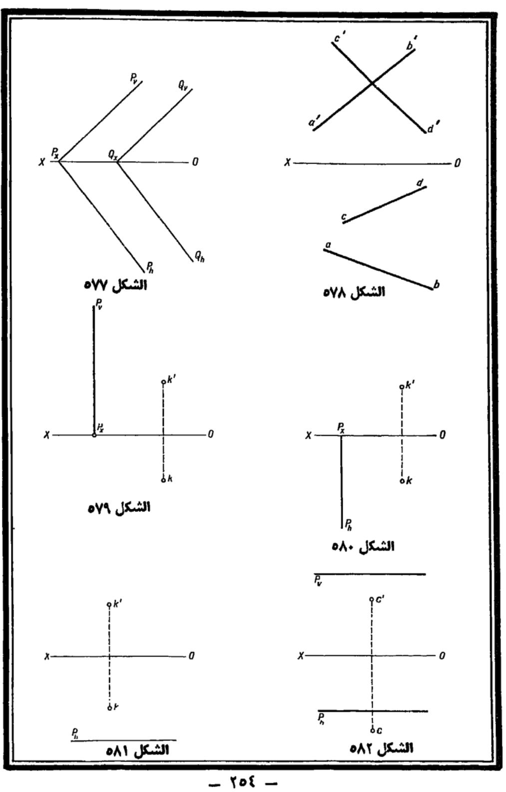
الشكل ٥٧٢

الشكل ٥٧٣

الشكل ٥٧٤

الشكل ٥٧٥

الشكل ٥٧٦



الشكل ٥٧٧

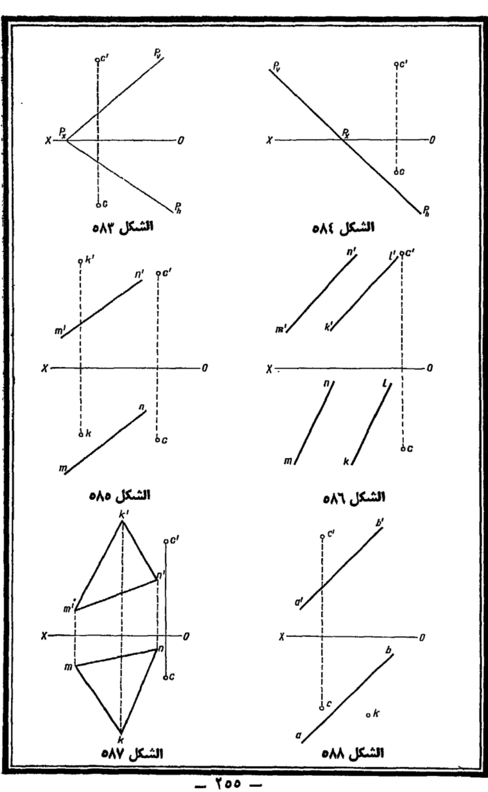
الشكل ٥٧٨

الشكل ٥٧٩

الشكل ٥٨٠

الشكل ٥٨١

الشكل ٥٨٢



الشكل ٥٨٣

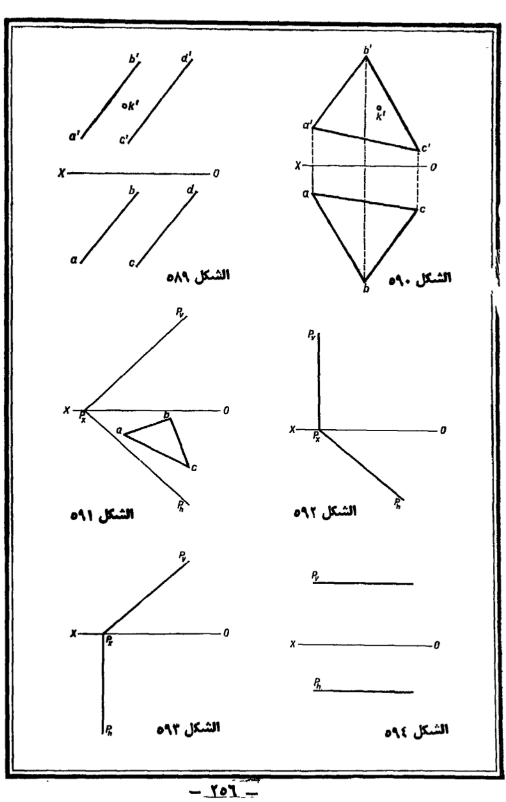
الشكل ٥٨٤

الشكل ٥٨٥

الشكل ٥٨٦

الشكل ٥٨٧

الشكل ٥٨٨



الشكل ٥٨٩

الشكل ٥٩٠

الشكل ٥٩١

الشكل ٥٩٢

الشكل ٥٩٣

الشكل ٥٩٤

٢٦٢ – ارسم من النقطة C كرة تمس المستوي P (الشكل ٥٨٢ – ٥٨٤) .

٢٦٣ – ارسم من النقطة C كرة تمس المستوي المعين بمستقيم MN ونقطة K (الشكل ٥٨٥) .

٢٦٤ – ارسم من النقطة C كرة تمس المستوي المعين بمستقيمين متوازيين LK و MN (الشكل ٥٨٦) .

٢٦٥ – ارسم من النقطة C كرة تمس مستوي المثلث KMN (الشكل ٥٨٧) .

٢٦٦ – إرفع من النقطة K عموداً طوله $l = 40$ mm على المستوي P إذا كان المسقط الأفقي للنقطة K من المستوي معلوماً (الشكل ٥٥٧) .

٢٦٧ – إرفع من النقطة K عموداً طوله $l = 40$ mm على المستوي المعين بمستقيم AB ونقطة C ، إذا كان المسقط الأفقي للنقطة K معلوماً (الشكل ٥٨٨) .

٢٦٨ – إرفع من النقطة K عموداً طوله $l = 40$ mm على المستوي المعين بمستقيمين متوازيين AB و CD إذا كان المسقط الشاقولي للنقطة K من المستوي معلوماً (الشكل ٥٨٩) .

٢٦٩ – إرفع من النقطة K عموداً طوله $l = 40$ mm على مستوي المثلث ABC إذا كان المسقط الشاقولي للنقطة K من مستوي المثلث معلوماً (الشكل ٥٩٠) .

٢٧٠ – ارسم مسقطي موشور ثلاثي قائم ، قاعدته ABC واقعة في المستوي

P إذا علم المسقط الأفقي للقاعـــدة ، وارتفاعـه h = 40 mm
(الشكل ٥٩١) .

٢٧١ – ارسم المحل الهندسي لجميع نقاط الفراغ التي تبعـد عن المستوي P بمقدار $l = 20$ mm (الشكل ٥٩٢ – ٥٩٧) .

٢٧٢ – ارسم المحل الهندسي لجميـع نقاط الفراغ التي تبعد عن المستوي المعين بمستقيم AB ونقطة C بمقدار $l = 30$ mm (الشكل ٥٩٨) .

٢٧٣ – ارسم المحل الهندسي لجميـع نقاط الفراغ التي تبعد عن المستوي المعين بمستقيمين متوازيين AB وDC بمقدار $l = 30$ mm (الشكل ٥٩٩) .

٢٧٤ – ارسم المحل الهندسي لجميـع نقاط الفراغ التي تبعد عن مستوي المثلث ABC بمقدار $l = 30$ mm (الشكل ٦٠٠) .

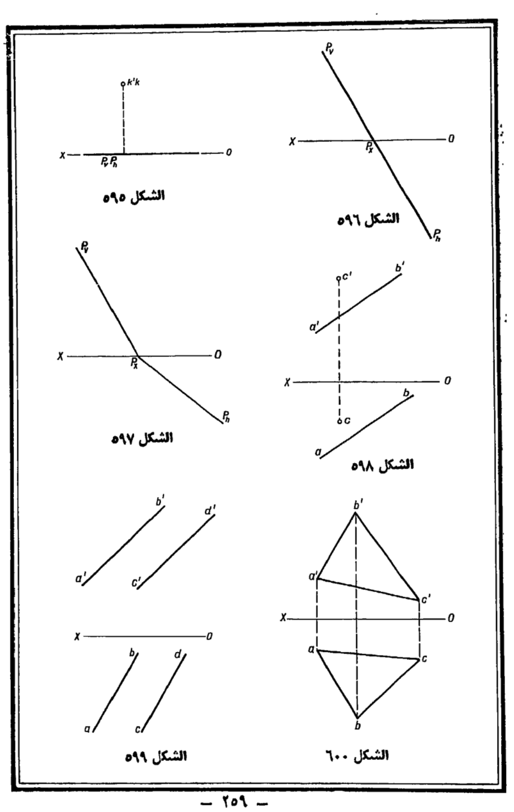
٢٧٥ – ارسم في المستوي Q المحل الهندسي لجميـع النقاط التي تبعد عن المستوي P بمقدار $l = 30$ mm (الشكل ٣٩٣ ، ٣٩٤) .

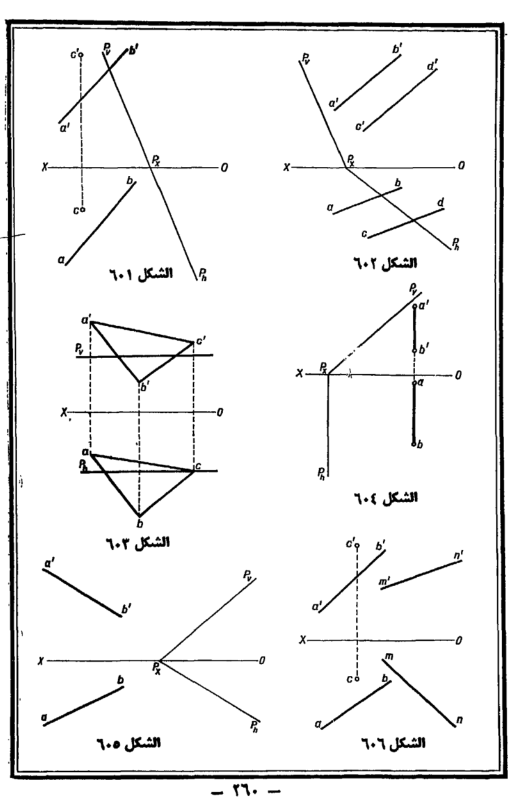
٢٧٦ – ارسم في المستوي المعين بمستقيم AB ونقطة C ، المحل الهندسي لجميـع النقاط التي تبعد عن المستوي P بمقدار $l = 25$ mm (الشكل ٦٠١) .

٢٧٧ – ارسم في المستوي المعين بمستقيمين متوازيين AB وCD المحل الهندسي لجميـع النقاط التي تبعد عن المستوي P بمقدار $l = 25$ mm (الشكل ٦٠٢) .

٢٧٨ – ارسم في مستوي المثلث ABC المحل الهندسي لجميـع النقاط التي تبعـد عن المستوي P بمقدار $l = 25$ mm (الشكل ٦٠٣) .

٢٧٩ – ارسم في المستوي P المحل الهندسي لجميـع النقاط التي تبعد عـــن


k'k
x
o
$P_v P_h$
الشكل ٥٩٥
P_v
X
O
P_x
P_h
الشكل ٥٩٦
P_v
X
O
P_x
P_h
الشكل ٥٩٧
c'
b'
a'
X
O
b
c
a
الشكل ٥٩٨
b'
d'
a'
c'
x
o
b
d
a
c
الشكل ٥٩٩
b'
a'
c'
X
O
a
c
b
الشكل ٦٠٠



الشكل ٦٠١

الشكل ٦٠٢

الشكل ٦٠٣

الشكل ٦٠٤

الشكل ٦٠٥

الشكل ٦٠٦

المستوي المعين بمستقيم AB ونقطة C بمقدار $l = 25\ mm$ (الشكل ٦٠١) .

٢٨٠ — ارسم في المستوي P المحل الهندسي لجميع النقاط التي تبعد عن المستوي المعين بمستقيمين متوازيين AB و CD بمقدار $l = 30\ mm$ (الشكل ٦٠٢) .

٢٨١ — ارسم في المستوي P المحل الهندسي لجميع النقاط التي تبعد عن مستوي المثلث ABC بمقدار $l = 20\ mm$ (الشكل ٦٠٣) .

٢٨٢ — أوجد على المستقيم AB نقطة تبعد عن المستوي P بمقدار $l = 25\ mm$ (الشكل ٦٠٤ ، ٦٠٥) .

٢٨٣ — أوجد على المستقيم MN نقطة تبعد عن المستوي المعين بمستقيم AB ونقطة C بمقدار $l = 20\ mm$ (الشكل ٦٠٦) .

٢٨٤ — أوجد على المستقيم MN نقطة تبعد عن المستوي المعين بمستقيمين متوازيين AB و CD بمقدار $l = 25\ mm$ (الشكل ٦٠٧) .

٢٨٥ — أوجد على المستقيم MN نقطة تبعد عن مستوي المثلث ABC بمقدار $l = 25\ mm$ (الشكل ٦٠٨) .

٢٨٦ — عين المسقط الناقص للنقطة A التي تبعد عن المستوي P بمقدار $l = 25\ mm$ (الشكل ٦٠٩ — ٦١٢) .

٢٨٧ — عين المسقط الناقص للنقطة K التي تبعد عن المستوي المعين بمستقيم AB ونقطة C بمقدار $l = 20\ mm$ (الشكل ٦١٣) .

٢٨٨ — عين المسقط الناقص للنقطة K التي تبعد عن المستوي المعين بمستقيمين متوازيين AB و CD بمقدار $l = 25\ mm$ (الشكل ٦١٤) .

٢٨٩ – عين المسقط الناقص للنقطة K التي تبعد عن مستوي المثلث ABC بمقدار $l = 25$ mm (الشكل ٦١٥) .

٢٩٠ – ارسم أثري المستوي P العمودي على المستقيم AB إذا أعطيت نقطة إلتقاء الأثرين لهذا المستوي (الشكل ٦١٦ – ٦١٩) .

٢٩١ – ارسم الأثر الناقص للمستوي P العمودي على المستقيم AB (الشكل ٦٢٠ ، ٦٢١) .

٢٩٢ – ارسم أثري مستوي يمر من النقطة C ويتعامد مع المستقيم AB (الشكل ٦٢٢ – ٦٢٤) .

٢٩٣ – هل المستقيان AB و CD متعامدان (الشكل ٦٢٥) ؟

٢٩٤ – عين المسقط الناقص للمستقيم CD الذي يتقاطع مع المستقيم AB بزاوية $90°$ (الشكل ٥٦٣) .

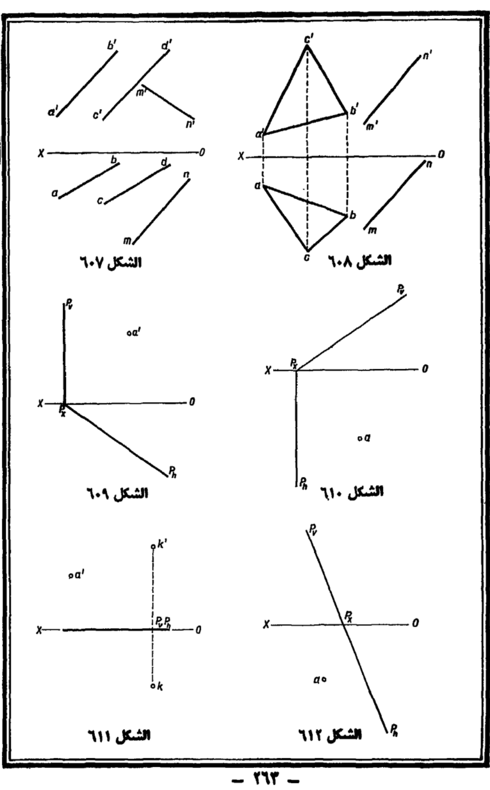
٢٩٥ – مرر من النقطة A مستوياً عمودياً على المستويين P وQ (الشكل ٦٢٦) .

٢٩٦ – ارسم المحل الهندسي لجميع نقاط الفراغ المتساوية الأبعاد عن طرفي القطعة AB (الشكل ٥٥٨ – ٦٢٧) .

٢٩٧ – ارسم في المستوي P المحل الهندسي لجميع النقاط المتساوية الأبعاد عن طرفي القطعة AB (الشكل ٦٢٨) .

٢٩٨ – ارسم في المستوي المعين بمستقيم AB ونقطة C المحل الهندسي لجميع النقاط المتساوية الأبعاد عن طرفي القطعة MN (الشكل ٦٢٩) .

٢٩٩ – ارسم في المستوي المعين بمستقيمين متوازيين AB و CD المحل الهندسي



الشكل ٦٠٧

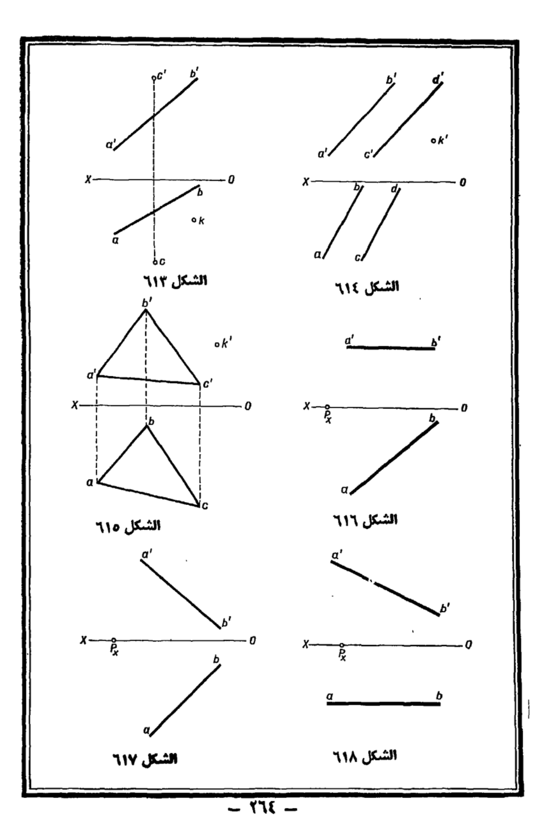
الشكل ٦٠٨

الشكل ٦٠٩

الشكل ٦١٠

الشكل ٦١١

الشكل ٦١٢



الشكل ٦١٣

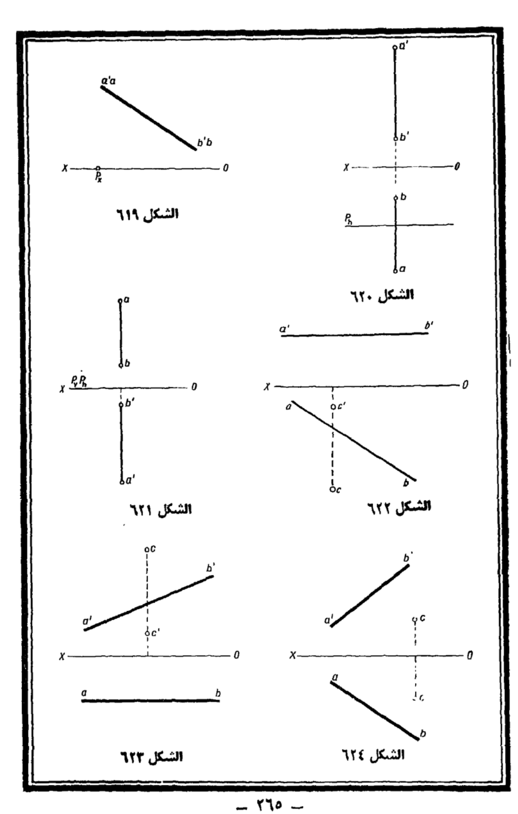
الشكل ٦١٤

الشكل ٦١٥

الشكل ٦١٦

الشكل ٦١٧

الشكل ٦١٨



الشكل ٦١٩

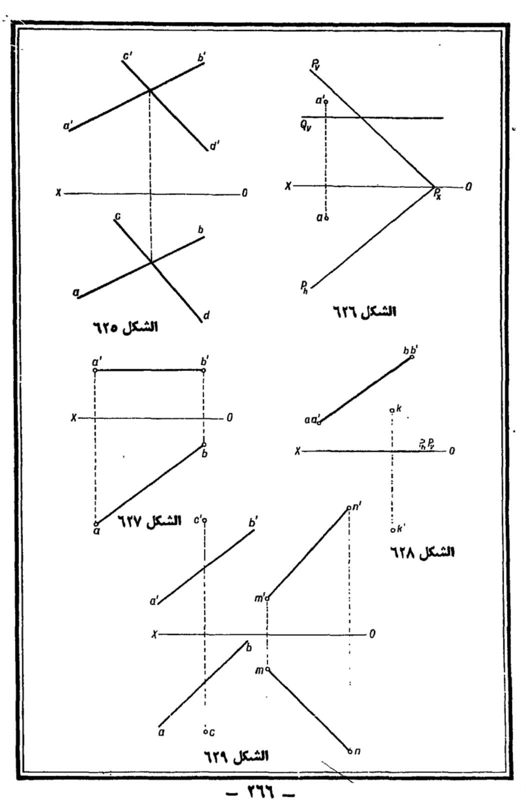
الشكل ٦٢٠

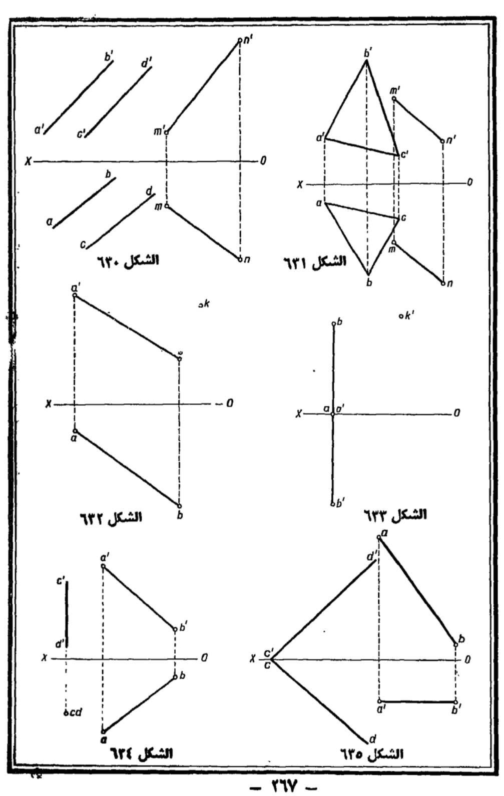
الشكل ٦٢١

الشكل ٦٢٢

الشكل ٦٢٣

الشكل ٦٢٤


c'
b'
a'
d'
X
0
c
b
a
d
الشكل ٦٢٥
Pv
a'
Qv
X
0
Px
a
Ph
الشكل ٦٢٦
a'
b'
X
0
b
a
الشكل ٦٢٧
bb'
aa'
k
X
0
k'
الشكل ٦٢٨
c'
b'
n'
a'
m'
X
0
b
m
a
c
n
الشكل ٦٢٩



الشكل ٦٣٠

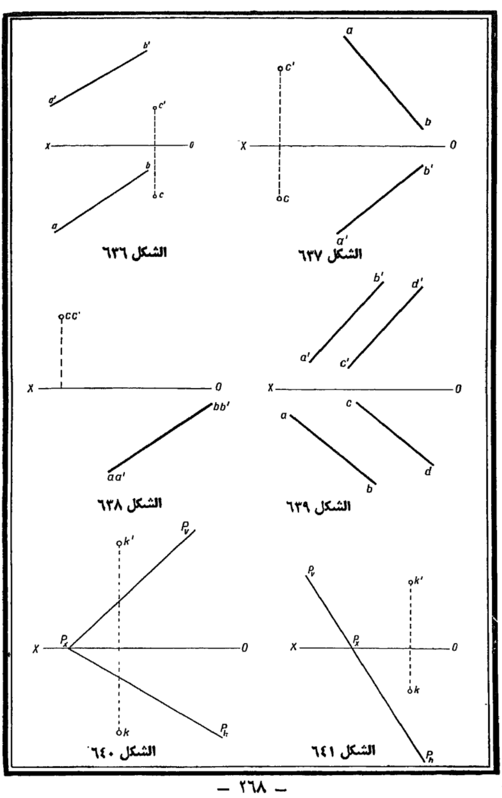
الشكل ٦٣١

الشكل ٦٣٢

الشكل ٦٣٣

الشكل ٦٣٤

الشكل ٦٣٥



الشكل ٦٣٦

الشكل ٦٣٧

الشكل ٦٣٨

الشكل ٦٣٩

الشكل ٦٤٠

الشكل ٦٤١

لجميع النقاط المتساوية الأبعاد عن طرفي القطعة MN (الشكل ٦٣٠) .

٣٠٠ – ارسم في مستوي المثلث ABC المحل الهندسي لجميع النقاط المتساوية الأبعاد عن طرفي القطعة MN (الشكل ٦٣١) .

٣٠١ – أوجد المسقط الناقص للنقطة K المتساوية الابعاد عن طرفي القطعة AB (الشكل ٦٣٢ ، ٦٣٣) .

٣٠٢ – أوجـــد على المستقيم CD نقطة متساوية الأبعاد عن طرفي القطعة AB (الشكل ٦٣٤، ٦٣٥) .

٣٠٣ – أسقط من النقطة C عموداً على المستقيم AB (الشكل ٦٣٦ – ٦٣٨) .

٣٠٤ – عين بعد النقطة C عن المستقيم AB (الشكل ٦٣٦ – ٦٣٨) .

٣٠٥ – أنشىء كرة مركزها في النقطة C وتمس المستقيم AB (الشكل ٦٣٦ – ٦٣٨) .

٣٠٦ – عين البعد بين المستقيمين المتوازيين AB و CD (الشكل ٦٣٩) .

٣٠٧ – أوجد نقطة على المستقيم AB تبعد عن النقطة C بمقدار $l = 30$ mm. ماهي الحالات الممكنة (الشكل ٦٣٦) ؟

٣٠٨ – مرر من النقطة C مستقيماً يقطع المستقيم AB بزاوية 45° . ماهو عدد المستقيمات الممكنة (الشكل ٦٣٧) ؟

٣٠٩ – مرر من النقطة K بصورة عمودية على المستوي P :

١ — مستوياً شاقولياً R (الشكل ٦٤٠) .

٢ — مستوياً أمامياً S (الشكل ٦٤١) .

٣١٠ — مرر من النقطة K بصورة عمودية على المستوي المعطى بمستقيم AB ونقطة C مستوياً شاقولياً R (الشكل ٦٤٢) .

٣١١ — مرر من النقطة K بصورة عمودية على المستوي المعين بمستقيمين متوازيين AB وCD مستوياً أمامياً S (الشكل ٦٤٣) .

٣١٢ — مرر من النقطة K بصورة عمودية على مستوي المثلث ABC مستوياً S يوازي خط الأرض (الشكل ٦٤٤) .

٣١٣ — مرر من النقطة K بصورة عمودية على المستوي P مستوياً كيفياً Q ذا أثرين على استقامة واحدة (الشكل ٦٤٥) .

٣١٤ — مرر من المستقيم AB مستوياً عمودياً على المستوي P (الشكل ٦٤٦ ، ٦٤٧) .

٣١٥ — مرر من المستقيم MN مستوياً عمودياً على المستوي المعين بمستقيم AB ونقطة C (الشكل ٦٤٨) . ارسم المستوي بأثريه .

٣١٦ — مرر من المستقيم MN مستوياً عمودياً على المستوي المعين بمستقيمين متوازيين AB و CD (الشكل ٦٤٩) . ارسم المستوي بأثريه .

٣١٧ — مرر من المستقيم MN مستوياً عمودياً على مستوي المثلث ABC (الشكل ٦٥٠) . ارسم المستوي بأثريه .

٣١٨ — ارسم مثلثاً متساوي الساقين ABC قاعدته BC واقعة على المستقيم MN

إذا كان طول ساق المثلث مساوياً 1.25 من إرتفاعه (الشكل ٦٥١) .

٣١٩ – ارسم مثلثاً متساوي الساقين ABC قاعدته قاعدته BC على المستقيم MN إذا كان طولها مساوياً 1.5 من ارتفاع المثلث (الشكل ٦٥١) .

٣٢٠ – ارسم مثلثاً متساوي الساقين ABC قاعدته BC واقعة على المستقيم MN إذا كانت زاوية القاعدة تساوي 30° (الشكل ٦٥١) .

٣٢١ – ارسم مثلثاً متساوي الأضلاع ABC قاعدته BC واقعة على المستقيم MN (الشكل ٦٥١) .

٣٢٢ – ارسم مثلثاً قائم الزاوية ABC ضلعه القائم BC واقع على المستقيم MN إذا كان طول الوتر مساوياً 1.25 من ارتفاعه (الشكل ٦٥٢) .

٣٢٣ – ارسم مثلثاً قائم الزاوية ABC ضلعه القائم BC واقع على المستقيم MN إذا كانت الزاوية الحادة C مساوية 30° (الشكل ٦٥٢) .

٣٢٤ – ارسم مثلثاً قائماً متساوي الساقين ABC ، وتره BC واقع على المستقيم MN (الشكل ٦٥١) .

٣٢٥ – ارسم مثلثاً قائماً متساوي الساقين ABC ضلعه القائم BC واقع على المستقيم MN (الشكل ٦٥٢) .

٣٢٦ – ارسم مستطيلاً ABCD ضلعه الكبير BC واقع على المستقيم MN إذا كانت مساحته تساوي $1,5\ AB^2$ (الشكل ٦٥٢) .

٣٢٧ – ارسم مستطيلاً ABCD ضلعه الكبير BC واقع على المستقيم MN إذا كانت نسبة ضلعيه 5 1 (الشكل ٦٥٢) .

٣٢٨ – ارسم مربعاً ABCD ضلعه BC واقع على المستقيم MN (الشكل ٦٥٢) .

٣٢٩ – ارسم مربعاً ABCD قطره BD واقع على المستقيم MN (الشكل ٦٥١) .

٣٣٠ – ارسم متوازي أضلاع ABCD قاعدته BC واقعة على المستقيم MN إذا كانت الزاوية الحادة B تساوي 60° ، وطول قطره AC أكبر بمقدار 5 mm من ضلعه الجانبي (الشكل ٦٥١) .

٣٣١ – ارسم متوازي أضلاع ABCD قاعدته BC واقعة على المستقيم MN إذا كان طول ضلعه الجانبي مساوياً 1 25 من ارتفاعه ، وكانت النسبة بين ضلعيه مساوية 2 (الشكل ٦٥١) .

٣٣٢ – ارسم معيناً ABCD ضلعه BC واقع على المستقيم MN إذا كان طول ضلعه مساوياً 1.2 من إرتفاعه (الشكل ٦٥١) .

٣٣٣ – ارسم معيناً ABCD ضلعه BC واقع على المستقيم MN إذا كانت زاويته الحادة B تساوي 60° (الشكل ٦٥١) .

٣٣٤ – ارسم معيناً ABCD قطره الكبير BD واقع على المستقيم MN إذا كانت نسبة قطريه تساوي 2 (الشكل ٦٥١) .

٣٣٥ – ارسم شبه منحرف قائم ABCD قاعدته الكبرى BC واقعة على المستقيم MN إذا كان : AB=AD ، DC=1,15AB (الشكل ٦٥٢).

٣٣٦ – ارسم شبه منحرف قائم ABCD قاعدته الكبرى BC واقعة على المستقيم MN إذا كان: $AB=AD=\frac{3}{2}$ BC (الشكل ٦٥٢) .

٣٣٧ – ارسم شبه منحرف قائم ABCD قاعدته الكبرى BC واقعة على

المستقيم MN إذا علم أن AB = AD وأن الزاوية C تساوي 45°
(الشكل ٦٥٢) .

٣٣٨ – ارسم شبه منحرف متساوي الساقين ABCD قاعدته الكبرى BC واقعة على المستقيم MN إذا علم أن AB = AD = DC = 40 mm (الشكل ٦٥١) .

٣٣٩ – ارسم شبه منحرف متساوي الساقين ABCD قاعدته الكبرى BC واقعة على المستقيم MN إذا كانت زاويته الحادة تساوي 45° وكانت قاعدته الصغرى تساوي ضلعه الجانبي المائل (الشكل ٦٥١) .

٣٤٠ – ارسم مثلثاً متساوي الساقين ABC قاعدته BC واقعة على المستقيم MN إذا علم أن ساقه أكبر من ارتفاعه AD بمقدار 10 mm (الشكل ٦٥١) .

٣٤١ – ارسم مثلثاً متساوي الأضلاع ABC قاعدته BC واقعة على المستقيم MN إذا كانت النقطة K أساساً لارتفاعه (الشكل ٦٥٣) .

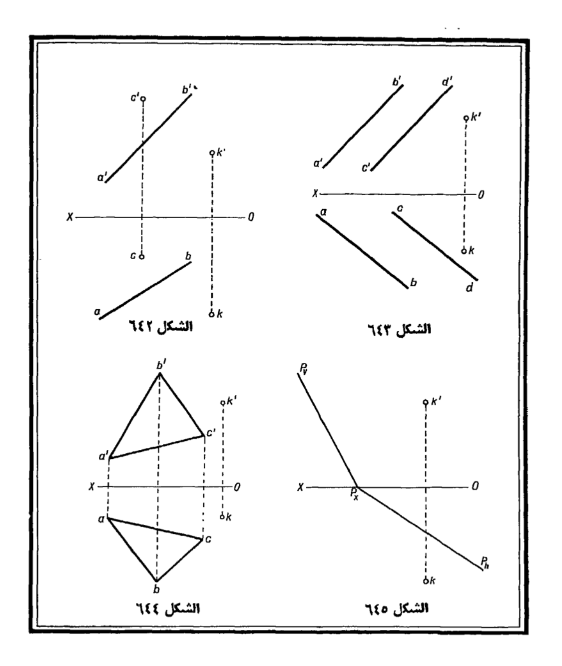
٣٤٢ – ارسم مثلثاً قائم الزاوية ABC ضلعه القائم BC واقع على المستقيم MN إذا كان نصف قطر الدائرة الموسومة من رؤوس المثلث مساوياً 0.75 AB
(الشكل ٦٥١) .

٣٤٣ – ارسم مستطيلاً ABCD ضلعه الكبير BC واقع على المستقيم BM إذا كانت نسبة ضلعيه تساوي 2 (الشكل ٦٥٤) .

٣٤٤ – ارسم مربعاً ABCD ضلعه BC واقع على المستقيم MN (الشكل ٦٥٢) .

٣٤٥ – ارسم مربعاً ABCD ضلعه BC واقع على المستقيم BM (الشكل ٦٥٤) .

٣٤٦ – ارسم متوازي أضلاع ABCD ضلعه الكبير BC واقع على المستقيم



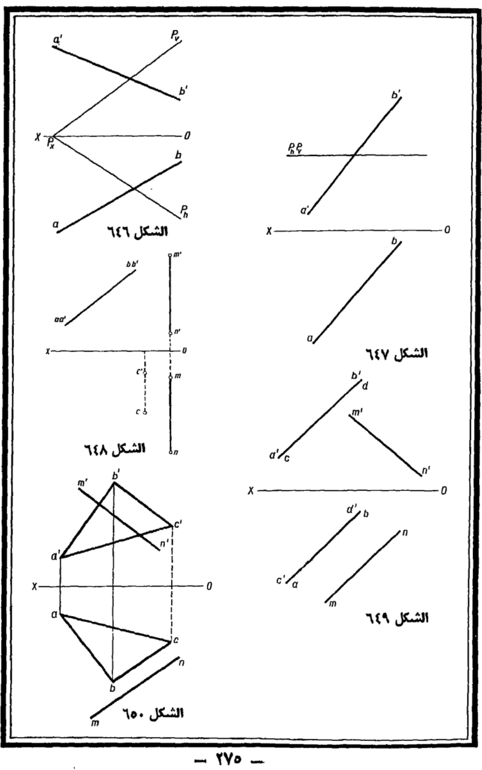
الشكل ٦٤٢

الشكل ٦٤٣

الشكل ٦٤٤

الشكل ٦٤٥

MN إذا كانت النقطة K أساساً لارتفاعه وتقسم الضلع بنسبة 1:2 وذلك بالإتجاه من النقطة B نحو النقطة C وكانت الزاوية $B = 60^\circ$ (الشكل ٦٥٣) .



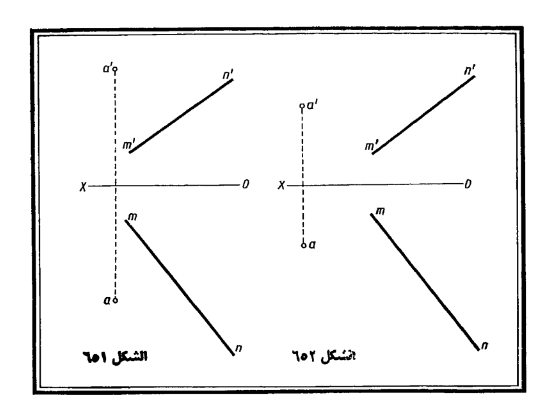
الشكل ٦٤٦

الشكل ٦٤٧

الشكل ٦٤٨

الشكل ٦٤٩

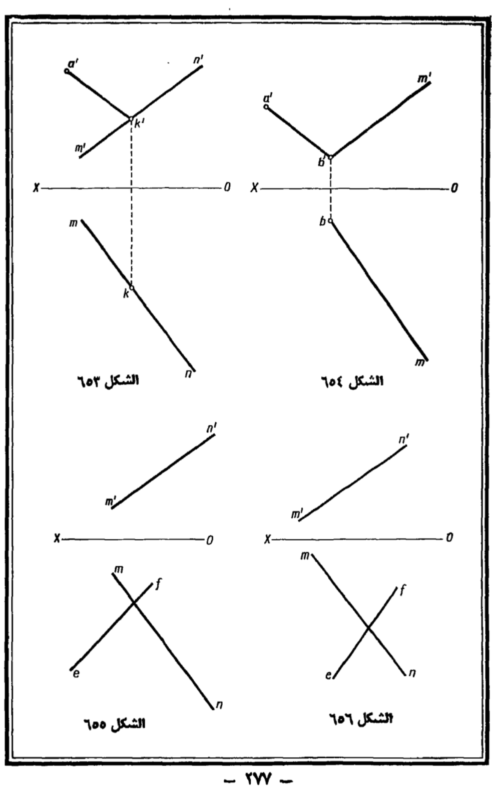
الشكل ٦٥٠

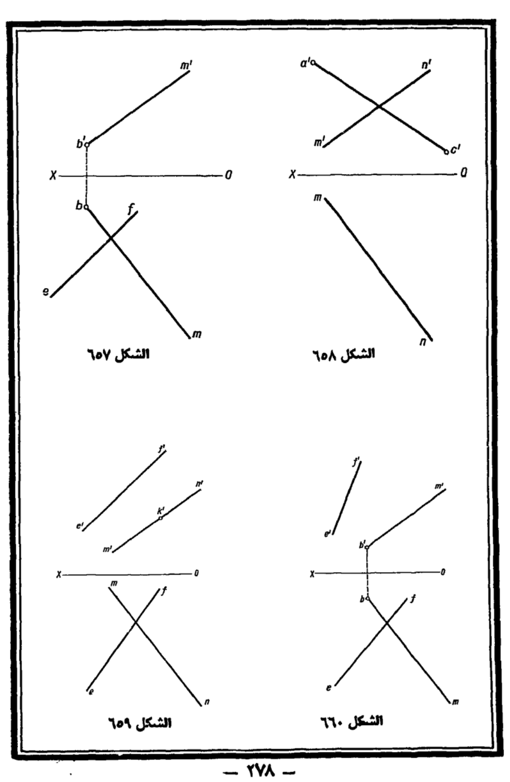


٣٤٧ – ارسم معيناً ABCD ضلعه BC واقع على المستقيم MN إذا كان طول ضلعه يساوي 1,2 من ارتفاعه (الشكل ٦٥١) .

٣٤٨ – ارسم شبه منحرف قائم ABCD قاعدته الكبرى BC واقعة على المستقيم BM إذا كانت $B = 90°$ ، $AB = AD$ ، $CD = 1,2\ AB$ (الشكل ٦٥٤).

٣٤٩ – ارسم شبه منحرف قائم ABCD قاعدته الكبرى BC واقعة على المستقيم MN وضلعه المائل AB واقع على المستقيم EF إذا كانت الزاوية $B = 90°$ ، $AB = AD = 40\ mm$ ، والزاوية $C = 45°$ (الشكل ٦٥٥) .


a'
n'
k'
m'
x
0
m
k
n
الشكل ٦٥٣
a'
m'
b'
x
0
b
m
الشكل ٦٥٤
n'
m'
x
0
m
f
e
n
الشكل ٦٥٥
n'
m'
x
0
m
f
e
n
الشكل ٦٥٦



الشكل ٦٥٧

الشكل ٦٥٨

الشكل ٦٥٩

الشكل ٦٦٠

٣٥٠ – ارسم معيناً ABCD قطره الكبير BD واقع على المستقيم MN إذا كان قطره الصغير مساوياً 40 mm وواقعاً على المستقيم EF ، وكانت مساحة المعين مساوية AC^2 (الشكل ٦٥٦) .

٣٥١ – ارسم متوازي أضلاع ABCD ضلعه BC يساوي 60 mm ويقع على المستقيم BM إذا كان ارتفاع متوازي الأضلاع AK واقعاً على المستقيم EF وكان طول ضلعه الجانبي مساوياً 40 mm (الشكل ٦٥٧) .

٣٥٢ – ارسم مربعاً ABCD قطره BD واقع على المستقيم MN (الشكل ٦٥٨) .

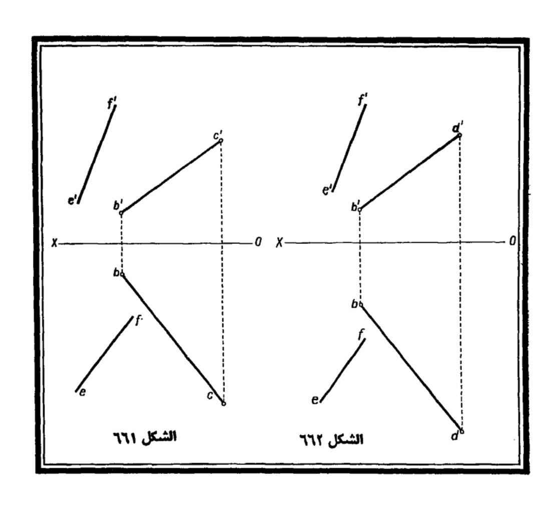
٣٥٣ – ارسم مستطيلاً ABCD ضلعه الكبير BC واقع على المستقيم MN إذا كان ضلعه AB يساوي 40 mm وواقعاً على المستقيم EF وكانت نسبة ضلعي المستطيل مساوية 1,5 (الشكل ٦٥٥) .

٣٥٤ – ارسم مثلثاً قائم الزاوية ABC ، قاعدته BC واقعة على المستقيم MN إذا كان طول ضلعه القائم AB مساوياً 30 mm وواقعاً على المستقيم EF وكانت مساحة المثلث مساوية $0,75\ AB^2$ (الشكل ٦٥٥) .

٣٥٥ – ارسم مثلثاً متساوي الأضلاع ABC قاعدته BC تساوي 50 mm وتقع على المستقيم MN إذا كان الرأس H واقعاً على المستقيم EF العمودي على المستقيم MN (الشكل ٦٥٦) .

٣٥٦ – ارسم مثلثاً متساوي الأضلاع ABC قاعدته BC واقعة على المستقيم MN إذا كان إرتفاعه AD مساوياً 40 mm وواقعاً على المستقيم EF (الشكل ٦٥٦) .

٣٥٧ – ارسم مثلثاً متساوي الساقين ABC قاعدته BC واقعة على المستقيم



الشكل ٦٦١

الشكل ٦٦٢

MN إذا كان إرتفاعه AD مساوياً 40 mm وواقعاً على المستقيم EF ، وكانت زاوية قاعدته تساوي 30° (الشكل ٦٥٦) .

٣٥٨ – ارسم مثلثاً متساوي الساقين ABC قاعدته BC = 60 mm واقعــة على المستقيم MN ، إذا كان رأسه A واقعاً على المستقيم EF العمودي على MN وكان ارتفاعه مساوياً 40 mm (الشكل ٦٥٦) .

٣٥٩ – ارسم مثلثاً متساوي الساقين ABC قاعدته BC واقعة على المستقيم MN ورأسه A واقع على المستقيم EF إذا كانت النقطة K أساساً لإرتفاعه AK وكان ساقه مساوياً 1,15 AK (الشكل ٦٥٩) .

٣٦٠ – ارسم مثلثاً متساوي الأضلاع ABC قاعدته BC واقعة على المستقيم MN ورأسه A واقع على المستقيم EF إذا كانت النقطة K أساساً لإرتفاعه AK (الشكل ٦٥٩) .

٣٦١ – ارسم مثلثاً قائماً متساوي الساقين ABC ضلعه القائم BC واقع على المستقيم BM ورأسه A واقع على المستقيم EF (الشكل ٦٦٠) .

٣٦٢ – ارسم مستطيلاً ABCD ضلعه الكبير AC واقع على المستقيم BM ورأسه A واقع على المستقيم EF إذا كان قطره مساوياً 2 AB (الشكل ٦٦٠) .

٣٦٣ – ارسم مربعاً ABCD ضلعه BC واقع على المستقيم BM ورأسه A واقع على المستقيم EF (الشكل ٦٦٠) .

٣٦٤ – ارسم مربعاً ABCD قطره BD واقع على المستقيم MN إذا كان رأسه A واقعاً على المستقيم EF وكانت النقطة K نقطة تقاطع قطريه (الشكل ٦٥٩) .

٣٦٥ – ارسم متوازي أضلاع ABCD ضلعه الكبير BC واقع على المستقيم MN ورأسه A واقع على المستقيم EF ، إذا كان ضلعه AB أكبر

من إرتفاعه AK بقدار 5 mm وضلعه BC يساوي AK 1,5 (الشكل ٦٥٩).

٣٦٦ – ارسم معيناً ABCD قطره الكبير BD واقع على المستقيمْ MN ورأسه A واقع على المستقيم EF إذا كانت النقطة K نقطة تقاطع قطريه وكانت النسبة بين قطريه تساوي 2 (الشكل ٦٥٩) .

٣٦٧ – ارسم شبه منحرف قائم ABCD قاعدته الكبرى BC واقعة على المستقيم BM إذا كان رأسه A واقعاً على المستقيم EF وكان AB=AD ، $B = 90^\circ$ ، $C = \varphi$ (الشكل ٦٦٠) .

٣٦٨ – ارسم مثلثاً متساوي الساقين ABC رأسه A واقع على المستقيم EF (الشكل ٦٦١) .

٣٦٩ – ارسم مستطيلاً ABCD رأسه A واقع على المستقيم EF واحسب مساحته (الشكل ٦٦١) .

٣٧٠ – ارسم معيناً ABCD رأسه A واقع على المستقيم EF (الشكل ٦٦٢) .

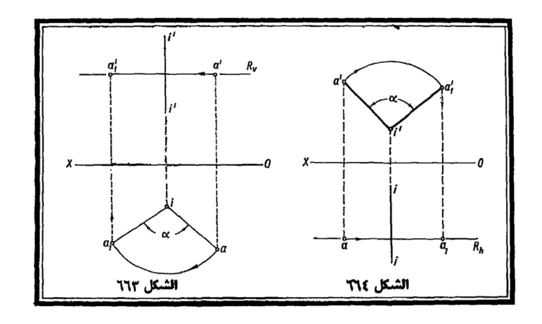
الفصل الثالث

البحث السابع عشر

الدوران . الانتقال الموازي لمستويات الإسقاط

● **المثال ١٨٦ :** دوّر النقطة A حول المحور الشاقولي I بزاوية 120° وفق إتجـاه عقارب الساعة (الشكل ٦٦٣) .

الحل : ترسم النقطة (a,a′) عند دورانها حول المحور (i,i′) في المستوي R العمودي على محور الدوران أي في المستوي الموازي للمستوي H دائرة نصف قطرها ai .



الشكل ٦٦٣
الشكل ٦٦٤

المسقط الأفقي (a) للنقطة يرسم قوسا $a\,a_1$ من دائرة نصف قطرها ai زاويته المركزية $\alpha = 120°$. يتحرك المسقط الشاقولي ('a) للنقطة وفق مستقيم يوازي خط الأرض (z = const) . بمعرفة الوضعية الجديدة للمسقط الأفقي (a_1) للنقطة نوجد مسقطها الشاقولي (a'_1) .

● **المثال ١٨٧** : دوّر النقطة A حول المحور الأمامي I بزاوية 120° وفق اتجاه عقارب الساعة (الشكل ٦٦٤) .

الحل : ترسم النقطة (a,a') عند دورانها حول المحور (i,i') في المستوي R العمودي على محور الدوران أي في المستوي الموازي للمستوي V دائرة نصف قطرها a'i' . المسقط الشاقولي (a') للنقطة يرسم قوساً $a'a_1'$ من دائرة نصف قطرها a' i' زاويته المركزية $\alpha = 120°$. يتحرك المسقط الأفقي (a) للنقطة وفق مستقيم يوازي خط الأرض (y = const) . بمعرفة الوضعية الجديدة للمسقط الشاقولي (a_1') للنقطة نوجد مسقطها الأفقي (a_1) .

● **المثال ١٨٨** : دوّر القطعة AB حول المحور الشاقولي I بزاوية 120° وفق إتجاه عقارب الساعة (الشكل ٦٦٥) .

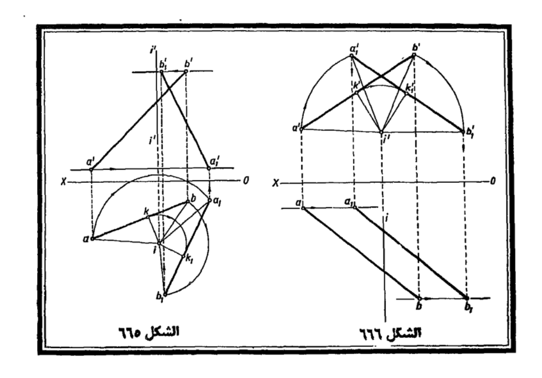
الحل : لكي ندور القطعة بالزاوية المفروضة يكفي أن ندور بهذه الزاوية وباتجاه واحد كلا من النقطتين A و B من القطعة وفق الخطوات التي سبق أن اتبعت .

يتضح من الإنشاء أن طول المسقط الأفقي ($a_1\, b_1$) للقطعة لايتغير ، إنما تتغير وضعيتها بالنسبة لخط الأرض . تمكننا هذه الخاصة بالاكتفاء بتدوير بالزاوية المفروضة نقطة واحدة فقط (k , k') من القطعة الاقرب مايمكن من المحور

(i , i') . وبعد تدوير النقطة k بزاوية $120°$ إلى الوضعية k_1 نرسم منها مستقيماً عمودياً على نصف القطر ik_1 ثم نأخذ عليه القطعتين $a_1 k_1 = ak$ و $b_1 k_1 = bk$.
وبمعرفة المسقط الأفقي (a_1b_1) للقطعة نوجد مسقطها الشاقولي ($a'_1 b'_1$) .
(الانشاء مبين على الشكل) .

● **المثال ١٨٩ :** دور القطعة AB حول المحور الأمامي I بزاوية $60°$ وفق إتجاه عقارب الساعة (الشكل ٦٦٦) .

الحل : لكي ندور القطعة بالزاوية المفروضة يكفي أن ندور بهذه الزاوية وباتجاه واحد كلا من النقطتين A و B من القطعة . ولهذا نقوم بالخطوات المذكورة سابقا .



الشكل ٦٦٥
الشكل ٦٦٦

يتضح من الإنشاء ان طول المسقط الشاقولي ($a_1\ b_1$) للقطعة لا يتغير انما يتغير فقط وضعيتها بالنسبة لخط الأرض . تمكننا هذه الخاصة بالاكتفاء بتدوير بالزاوية المفروضة نقطة واحدة فقط (k,k') من القطعة الأقرب مـــا يمكن من المحور (i , i') . بعد تدوير النقطة k' بزاوية $60°$ إلى الوضعية k_1' نرسم منها مستقيماً عمودياً على نصف القطر $i'\ k'_1$ ثم نأخذ عليه القطعتين $a_1'k_1' = a'k'$ و $b_1'k_1'=b'k'$ بمعرفة المسقط الشاقولي ($a_1'b_1'$) للقطعـة نوجـد المسقط الأفقي ($a_1\ b_1$) . (الإنشاء مبين على الشكل).

● **المثال ١٩٠ :** دور المثلث ABC حول المحور الشاقولي I بزاوية $120°$ باتجاه عقارب الساعة (الشكل ٦٦٧) .

الحل : ندور رؤوس المثلث A ، B ، C بزاوية $120°$. بمعرفـــة المساقط الأفقية (a_1) ، (b_1) ، (c_1) للنقاط نوجـد مساقطهـــا الشاقولية (a_1') ، (b_1') ، (c_1') وبوصل مساقط الرؤوس المتماثلة نحصل على مساقط المثلث : الأفقي ($a_1b_1c_1$) والشاقولي ($a'_1b'_1c_1'$) . علينا أن ننتبه إلى أن المثلثـــين a b c و $a_1b_1c_1$ متساويان فيما بينها .

ملاحظة : عند دوران المثلث حول المحور الأمامي I المثلثان $a'\ b'\ c'$ و $a'_1\ b_1'\ c_1'$ كذلك متساويان فيما بينها .

نتائج : ١ ـــ عند دوران نقطة حول محور شاقولي I سيتحرك مسقطها الشاقولي وفق مستقيم يوازي خط الأرض .

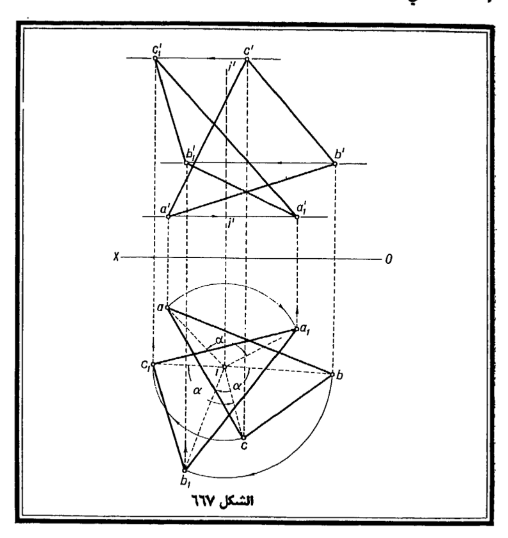
٢ ـــ عند دوران نقطة حول محور أمامي I سيتحرك مسقطها الأفقي وفق مستقيم يوازي خط الأرض .

٣ ـــ عند دوران قطعة حول محور شاقولي I فطول المسقط الأفقي للقطعة لا يتغير .

وبناء عليه لا تتغير زاوية ميل القطعة بالنسبة لمستوي الإسقاط الأفقي .

٤ ــ عند دوران قطعة حول محور أمامي I فطول المسقط الشاقولي للقطعة لا يتغير . وبناء عليه لا تتغير زاوية ميل القطعة بالنسبة لمستوي الإسقاط الشاقولي .

٥ ــ عند دوران شكل مستوي (مثلاً مثلث) حول محور شاقولي I فالمسقط الأفقي للشكل لا يتغير ، وبناء عليه لا تتغير زاويــة ميل الشكل بالنسبة لمستوي الإسقاط الأفقي .



الشكل ٦٦٧

٦ ــ عند دوران شكل مستوي حول محور امامي l فإن المسقط الشاقولي للشكل لايتغير وبالتالي لا تتغير زاوية ميل الشكل بالنسبة لمستوي الإسقاط الشاقولي .

٧ ــ عند دوران مجموعة عناصر هندسية (نقاط ، مستقيات أو نقاط ومستقيات) حول محور عمودي على H (أو V) فالوضعية النسبية للمساقط الأفقية (الشاقولية) للعناصر المفروضة لا تتغير ، إنما يتغير وضعها فقط بالنسبة لخط الأرض .

في بعض الحالات عند دوران مجموعة عناصر هندسية حول محور عمودي على مستوي الإسقاط يحدث تطابق المسقط الحاصل مع المسقط الأسامي والتخلص من ذلك يجب نقل المجموعة بصورة موازية لمستوي الإسقاط .

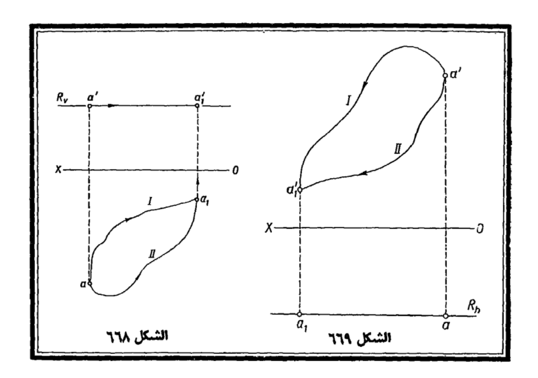
● **المثال ١٩١ :** لدينا نقطة A ومستوي أفقي R مار من النقطة . تتبع حركة النقطة في المستوي . (الشكل ٦٦٨) .

الحل : إن أي خط (مسار) ترسمه النقطة (a,a′) في المستوي R سيكون مسقطه الشاقولي بشكل مستقيم منطبق على أثر المستوي R_v . المسقط الشاقولي (a′) للنقطة يتحرك وفق مستقيم يوازي خط الأرض أما مسقطها الأفقي (a) فيتحرك وفق خط مماثل لحرك النقطة A في المستوي R (لماذا ؟) .

لنفرض أن النقطة (a) تحركت وفق الخط I إلى الوضعية a_1 ، بمعرفة ذلك من السهل أن نعين وضعية المسقط الشاقولي (a_1') للنقطة .

إذا انتقلت النقطة a إلى نفس الوضعية a_1 وفق الخط II فهذا لاينعكس أبداً على وضعية المسقط (a_1') . ومنه نرى أنه يكفي أن نبين الوضعية الجديدة للمسقط الأفقي (a_1) للنقطة كي نعين تماماً وضعية مسقطها الشاقولي (a_1') .
في حالتنا هذه لا تتحرك النقطة حول محور إنما تنتقل وفق المستوي الأفقي .

فيما يلي سندعو هذا الانتقال « بالانتقال الموازي للمستوي H أو الانتقال الأفقي » . من الشكل نرى أن بعد المسقط الشاقولي (a_1') للنقطة عن خط الأرض لايتغير كما في الدوران حول محور شاقولي I .



الشكل ٦٦٨ الشكل ٦٦٩

● **المثال ١٩٢** : لدينا نقطة A ومستوي جبهي R مار من هذه النقطة . تتبع حركة النقطة في المستوي (الشكل ٦٦٩) .

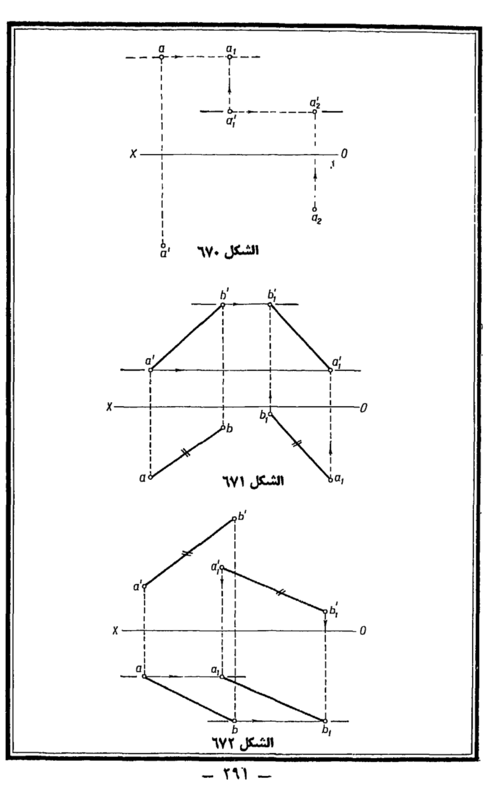
الحل : إن أي خط (مسار) ترسمه النقطة (a ، a') في المستوي R سيكون مسقطه الأفقي بشكل خط مستقيم منطبق على أثر المستوي R_h . المسقط الأفقي (a) للنقطة يتحرك وفق مستقيم يوازي خط الأرض أما مسقطها الشاقولي (a') فيتحرك وفق خط مماثل لحرك النقطة A في المستوي R (لماذا ؟).

لنفرض أن النقطة a' تحركت وفق الخط I إلى الوضعية a_1' . فبمعرفة ذلك من السهل أن نعين وضعية المسقط الأفقي (a_1) للنقطة . إذا انتقلت النقطة a' إلى نفس الوضعية a_1' وفق الخط II فهذا لاينعكس بتاتاً على وضعية المسقط الأفقي (a_1) للنقطة . ومنه نرى أنه يكفي أن نبين الوضعية الجديدة للمسقط الشاقولي (a_1') للنقطة كي نعين تماماً وضعية مسقطها الأفقي (a_1) .

في هذه الحالة لا تتحرك النقطة حول المحور إنما تنتقل في المستوي الموازي للمستوي V . فيما بعد سندعو هذا الانتقال « بالانتقال الموازي للمستوي V أو بالانتقال الجبهي » . من المخطط نرى أن بعد المسقط الأفقي (a_1) للنقطة عن خط الأرض لايتغير كما في الدوران حول محور امامي .

● **المثال ١٩٣ :** لدينا نقطة A في الربع الثالث ، انقلها إلى الربع الأول (الشكل ٦٧٠) .

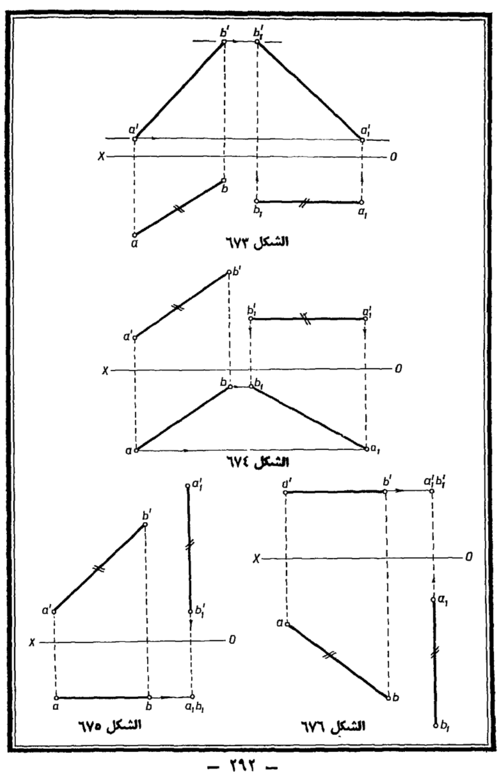
الحل : كي ننقل النقطة (a , a') إلى الربع الأول يجب أن ننجز على التوالي حركتي إنتقال : الأولى جبهية لنقل النقطة (a , a') إلى الربع الثاني ، والثانية أفقية لنقل النقطة (a_1 , a'_1) إلى الربع الأول (يمكن أن نعكس التتابع : أولاً بصورة موازية للمستوي H بعد ذلك بصورة موازية للمستوي V) . بعد الانتقال الأول (عند انتقال النقطة إلى الربع الثاني) يجب أن يتوضع مسقطا النقطة فوق خط الأرض . المسقط الأفقي للنقطة يتحرك وفق مستقيم مواز لخط الأرض . بأخذ نقطة ما كمسقط شاقولي (a_1')



الشكل ٦٧٠

الشكل ٦٧١

الشكل ٦٧٢



الشكل ٦٧٣

الشكل ٦٧٤

الشكل ٦٧٥

الشكل ٦٧٦

للنقطة نوجد مسقطها الأفقي (a_1) . في الانتقال الثاني المسقط الشاقولي (a'_1) يتحرك وفق مستقيم يوازي خط الأرض . وبأخذ نقطة ما (a_2) تحت خط الأرض (لماذا ؟) كمسقط أفقي للنقطة نوجد مسقطها الشاقولي (a'_2) . النقطة (a_2 , a'_2) هي النقطة المطلوبة.

● **المثال ١٩٤** : انقل القطعة AB بصورة أفقية إلى وضعية ما (الشكل ٦٧١) .

الحل : عند انتقال القطعة بصورة أفقية طول مسقطها الأفقي كما في دوران القطعة حول محور شاقولي لا يتغير . لنأخذ تحت خط الأرض وبوضعية اختيارية (لكي نبقي القطعة في الربع الأول) قطعة a_1b_1 تساوي القطعة ab ، ثم نوجد مسقطها الشاقولي ($a'_1b'_1$) بمساعدة مسقطها (a_1b_1) .

ملاحظة : عند حل مثل هذه المسائل نسعى إلى إبقاء العناصر المعطاة في الربع الأول ، ونقلها إلى الربع الأول إذا أعطيت في الأرباع الأخرى .

● **المثال ١٩٥** : انقل القطعة AB بصورة جبهية إلى وضعية ما (الشكل ٦٧٢) .

الحل : عند نقل قطعة بصورة جبهية طول مسقطها الشاقولي كما في دوران القطعة حول محور أمامي لا يتغير . لنأخذ كيفياً قطعة $a'_1b'_1$ مساوية للقطعة $a'b'$ ثم نوجد مسقطها الأفقي (a_1b_1) بمساعدة مسقطها الشاقولي ($a'_1b'_1$) .

● **المثال ١٩٦** : انقل القطعة AB إلى وضعية جبهية (الشكل ٦٧٣) .

الحل : ننقل القطعة بصورة أفقية . بما أنها يجب أن تصبح في وضعية جبهية لذلك فمسقطها الأفقي يجب أن يوازي خط الأرض .

نأخذ تحت خط الأرض وبوضعية موازية له قطعة a_1b_1 مساوية للقطعة ab بعد ذلك نوجد مسقطها الشاقولي ($a'_1b'_1$) بمساعدة المسقط الأفقي (a_1b_1) .

● **المثال ١٩٧ :** انقل القطعة AB إلى وضعية أفقية (الشكل ٦٧٤) .

الحل : ننقل القطعة بصورة جبهية . بما أن القطعة يجب أن توضع في وضعية أفقية فمسقطها الشاقولي يجب أن يكون موازياً لخط الأرض .

لنأخذ فوق خط الأرض وبصورة موازية له قطعة $a'_1b'_1$ مساوية للقطعة $a'b'$.

ثم نوجد مسقطها الأفقي (a_1b_1) بمساعدة المسقط الشاقولي ($a_1'\ b'_1$) .

● **المثال ١٩٨ :** انقل القطعة AB إلى وضعية شاقولية (الشكل ٦٧٥) .

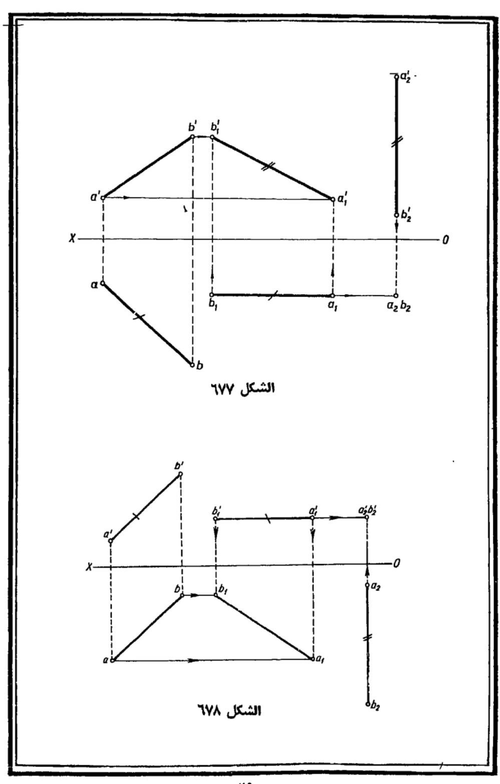
الحل : بما أن القطعة AB ذات وضعية جبهية فيكفي انتقال واحد موازي لمستوي الإسقاط الشاقولي . نأخذ قطعة $a'_1\ b'_1$ في وضعية عمودية على خط الأرض (لماذا ؟) مساوية للقطعة $a'\ b'$ ، بعد ذلك نوجد مسقطها الأفقي ($a_1\ b_1$) بشكل نقطة وذلك بمساعدة المسقط الشاقولي ($a'_1\ b'_1$) .

● **المثال ١٩٩ :** انقل القطعة AB إلى وضعية أمامية (الشكل ٦٧٦) .

الحل : بما أن القطعة AB ذات وضعية أفقية فيكفي انتقال واحد موازي لمستوي الإسقاط الأفقي . نأخذ قطعة $a_1\ b_1$ بوضعية عمودية على خط الأرض (لماذا ؟) ، مساوية للقطعة ab . بعد ذلك نوجد المسقط الشاقولي ($a'_1\ b'_1$) للقطعة بشكل نقطة بمساعدة المسقط الأفقي ($a_1\ b_1$) .

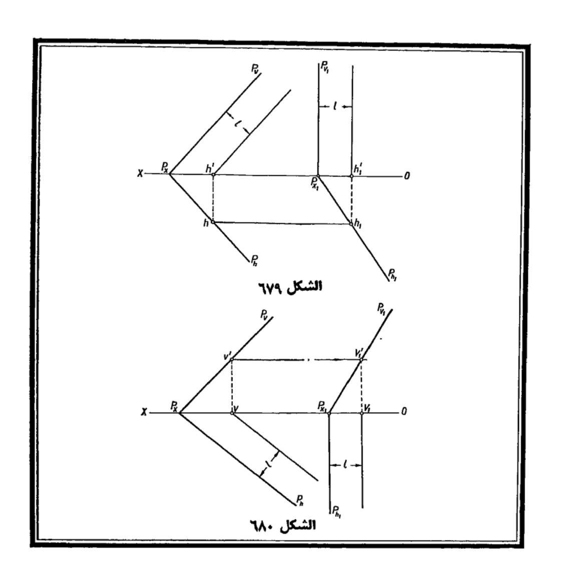
● **المثال ٢٠٠ :** انقل القطعة AB إلى وضعية شاقولية (الشكل ٦٧٧) .

الحل : بما أن القطعة المفروضة (ab ، a'b') ذات وضعية كيفية فلكي



الشكل ٦٧٧

الشكل ٦٧٨



الشكل ٦٧٩

الشكل ٦٨٠

ننقلها إلى وضعية شاقولية يجب أن ننجز انتقالين متتاليين : الأول ــ أفقي كي ننقل القطعة (ab , a'b') إلى وضعية جبهية ، الثاني ــ جبهي كي ننقل القطعة ($a_1b_1, a'_1b'_1$) إلى وضعية شاقولية . لهذا نأخذ في مكان ما وبوضعية موازية لخط الأرض قطعة

a_1b_1 مساوية للقطعة ab ثم نعين المسقط الشاقولي $(a'_1b'_1)$ للقطعة ، بعد ذلك نأخذ في وضعية عمودية على خط الأرض قطعة $a'_2b'_2$ مساوية للقطعة $a'_1b'_1$ ، ثم نوجد المسقط الأفقي (a_2b_2) للقطعة بشكل نقطة . القطعة $(a_2b_2 , a'_2b'_2)$ هي القطعة المطلوبة .

● **المثال ٢٠١ :** انقل القطعة AB إلى وضعية أمامية (الشكل ٦٧٨) .

الحل : بما أن القطعة المفروضة $(ab,a'b')$ ذات وضعية كيفية فلكي ننقلها إلى وضعية أمامية يجب أن ننجز انتقالين متتالين : الأول — موازياً لمستوي الإسقاط الشاقولي لكي نحوّل القطعة $(ab , a'b')$ إلى وضعية أفقية . الثاني — موازياً لمستوي الإسقاط الأفقي لكي نحوّل القطعة $(a_1b_1 , a'_1b'_1)$ إلى وضعية أمامية . لهذا نأخذ في مكان ما وبوضعية موازية لخط الأرض قطعة $a'_1b'_1$ مساوية للقطعة $a'b'$ ثم نعين المسقط الأفقي (a_1b_1) للقطعة . بعد ذلك نأخذ في وضعية عمودية على خط الأرض قطعة a_2b_2 مساوية للقطعة a_1b_1 ، ونعين المسقط الشاقولي $(a_2'b_2')$ للقطعة بشكل نقطة . القطعة $(a_2b_2 , a'_2b'_2)$ هي القطعة المطلوبة .

● **المثال ٢٠٢ :** انقل المستوي P إلى وضعية شاقولية (الشكل ٦٧٩) .

الحل : لكي ننقل المستوي المفروض إلى وضعية شاقولية نرسم في المستوي مستقيماً جبهياً وننقله إلى وضعية شاقولية ، عندها سيأخذ المستوي المفروض وضعية شاقولية . نرسم في المستوي P مستقيماً جبهياً وننقله بصورة موازية للمستوي V حتى يصبح المستقيم الجبهي في وضعية شاقولية . المسقط الشاقولي للمستقيم الجبهي ومن ثم الأثر الشاقولي (P_{v1}) للمستوي عموديان على خط الأرض . أما المسقط الأفقي للمستقيم الجبهي فيتحول إلى نقطة . ولما كان انتقال المستوي بشكل موازي لمستوي الإسقاط الشاقولي فزاوية ميله على مستوي الاسقاط هذا كما في دوران المستوي حول محور أمامي لاتتغير . كما لا يتغير في أي وضعية

للمستوي البعد بين الأثر الشاقولي للمستوي والمسقط الشاقولي للمستقيم الجبهي.

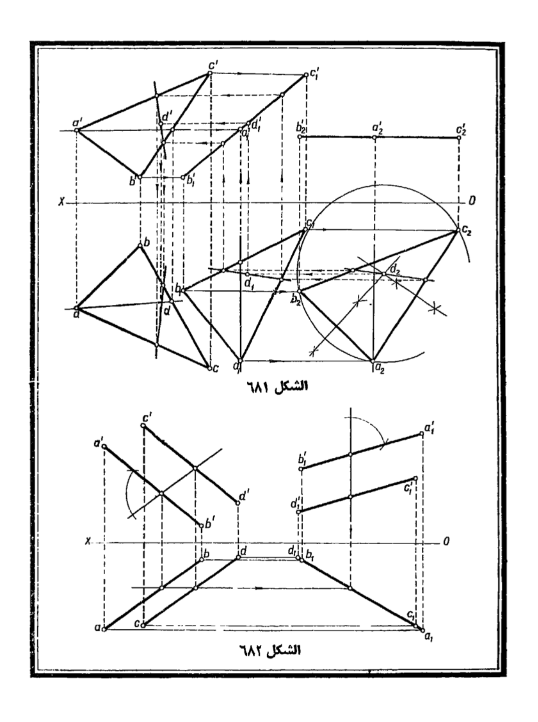
نأخذ على خط الأرض نقطة إلتقاء ما P_{x1} ونرسم منها بصورة عمودية على خط الأرض الأثر الشاقولي (P_{v1}) للمستوي ، وبشكل يوازيه وعلى بعد l نرسم المسقط الشاقولي للمستقيم الجبهي . بايجاد الأثر الأفقي للمستقيم الجبهي أي النقطة h_1 نرسم الأثر الأفقي (P_{h1}) للمستوي من النقطتين P_{x1} و h_1 .

● **المثال ٢٠٣ :** انقل المستوي P إلى وضعية أمامية (الشكل ٦٨٠) .

الحل : لكي ننقل المستوي المفروض إلى وضعية أمامية نرسم في المستوي مستقيماً أفقياً ثم ننقله إلى وضعية أمامية ، عندها المستوي المفروض سيأخذ وضعية أمامية أيضاً . لنرسم في المستوي P مستقيماً افقياً ما وننقله بصورة موازية للمستوي H بحيث يصبح في وضعية أمامية . المسقط الأفقي للمستقيم الأفقي وبالتالي الأثر الأفقي (P_{h1}) للمستوي عموديان على خط الأرض . المسقط الشاقولي للمستقيم الأفقي يتحول إلى نقطة . عند انتقال المستوي بصورة موازية لمستوي الإسقاط الأفقي فزاوية ميله على مستوي الإسقاط هذا لاتتغير . كما لايتغير البعد بين الأثر الأفقي للمستوي والمسقط الأفقي للمستقيم الأفقي مهما كانت وضعية المستوي .

ومنه : نأخذ على خط الأرض نقطة التقاء ما P_{x1} ونرسم منها بصورة عمودية على خط الارض الأثر الأفقي (P_{h1}) للمستوي ، وبصورة موازية له وعلى بعد l المسقط الأفقي للمستقيم الأفقي . بايجاد الأثر الشاقولي للمستقيم الأفقي أي النقطة v'_1 نرسم الأثر الشاقولي (P_{v1}) للمستوي من النقطتين v'_1 و P_{x1} .

● **المثال ٢٠٤ :** أوجد مركز الدائرة المارة من رؤوس المثلث ABC (الشكل ٦٨١) .



الشكل ٦٨١

الشكل ٦٨٢

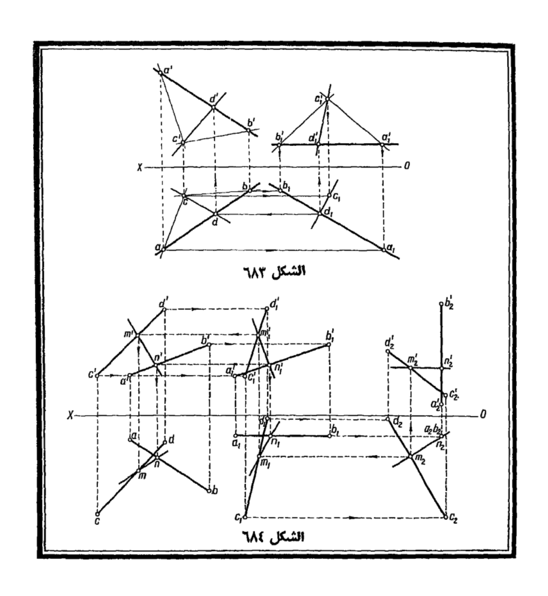
الحل يقع مركز الدائرة المارة من رؤوس المثلث في نقطة تقاطع محاوره فلكي نرسم هذه المحاور تلزمنا الابعاد الحقيقية للمثلث . لهذا يجب أن ننقل مستوي المثلث الى وضعية موازية لأحد مستويات الإسقاط مثلاً H . نتوصل إلى هذه الوضعية بانتقالين : الأول افقي والثاني جبهي .

لهذا نرسم مستقيماً أفقياً في مستوي المثلث من النقطة ($a.a'$) وننقله بصورة أفقية حتى يتعامد مع المستوي V . عند نقل المثلث بصورة أفقية فمسقطه الأفقي كما هو معروف يجب أن لايتغير ، لذلك نرسم المسقط الأفقي للمثلث في وضعية $a_1\ b_1\ c_1$ يكون فيها المسقط الأفقي للمستقيم الأفقي عمودياً على خط الأرض. بمساعدة المسقط $a_1\ b_1\ c_1$ نعين المسقط الشاقولي ($a'_1\ b'_1\ c'_1$) للمثلث الذي يأخذ شكل خط مستقيم (لماذا ؟) . بعد ذلك ننقل المثلث ($a_1 b_1\ c_1 , a'_1\ b'_1\ c'_1$) بصورة جبهية بحيث يشغل المسقط الشاقولي ($a'_2\ b'_2\ c'_2$) للمثلث وضعية موازية لخط الأرض ، ثم من $a'_2 b'_2\ c'_2$ نوجد $a_2 b_2 c_2$ — الشكل الحقيقي للمثلث . برسم محوري الضلعين $a_2 b_2$ و $a_2 c_2$ للمثلث نوجد نقطة تقاطعها (d_2, d'_2) — مركز الدائرة ، ثم نعود بها إلى الوضعية الأولى .

(الانشاء مبين على الشكل) .

● **المثال ٢٠٥ :** انقل المستقيمين المتوازيين AB و CD إلى وضعية يكون فيها مسقطاهما الافقيان منطبقين (الشكل ٦٨٢) .

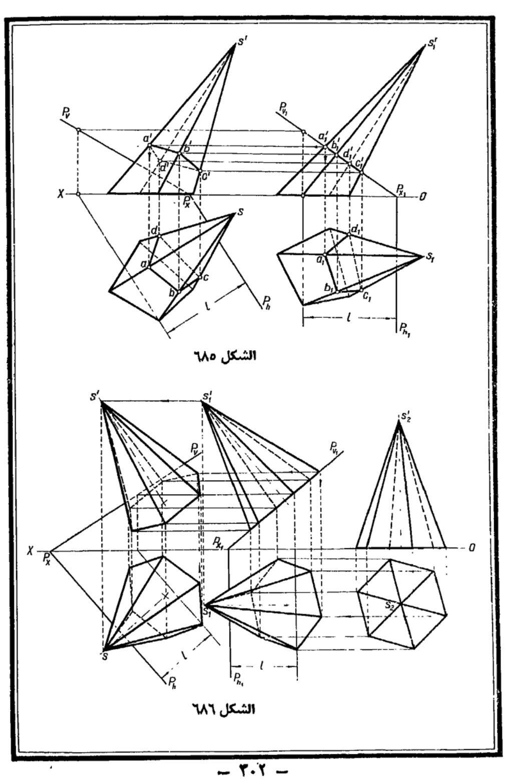
الحل : يعين المستقيمان AB و CD مستوياً مسقطاهما الأفقيان ينطبقان عندما يأخذ هذا المستوي وضعية شاقولية ومنه : نرسم مستقيماً جبهياً في هذا المستوي وننقل



الشكل ٦٨٣

الشكل ٦٨٤

المجموعة بأكملها بصورة موازيـــة للمستوي V بحيث يأخذ المستقيم الجبهي وضعية شاقولية . الوضعية النسبية المساقط الشاقولية سوف لا تتغير . بمعرفة المسقطين الشاقوليين $(a'_1b'_1)$ و $(c'_1d'_1)$ للمستقيمين نوجد مسقطيها الأفقيين (a_1b_1) و (c_1d_1) المنطبقين على بعضها .



الشكل ٦٨٥

الشكل ٦٨٦

● المثال ٢٠٦ : أسقط عموداً من النقطة C على المستقيم AB (الشكل ٦٨٣) .

الحل : ان عملية إسقاط عمود من نقطة على مستقيم بصورة مباشرة على المخطط ممكنة فقط في تلك الحالة عندما يكون المستقيم المفروض موازياً لأحد مستويات الإسقاط (وفق أي نظرية ؟) . لهذا ننقل المجموعة المفروضة بصورة موازية لمستوي الإسقاط الشاقولي حتى يصبح المستقيم (a_1b_1 ، a'_1b_1') أفقياً .

بمعرفة مساقط النقطة C_1 والمستقيم A_1B_1 نرسم من النقطة c_1 عموداً على المستقيم $a_1 b_1$ وعند تقاطعهما نحصل على المسقط الأفقي (d_1) — أساس العمود .وبايجاد مسقطي أساس العمود (d ، d') في الوضعية الأولية نرسم مسقطي العمود المنشود : الأفقي — من النقطتين c و d والشاقولي — من النقطتين c' و d' .

● المثال ٢٠٧ : اقطع المستقيمين AB و CD بمستقيم MN عمودي عليهما (الشكل ٦٨٤) .

الحل : ننقل المستقيمين ($a b$ ، $a'b'$) ، ($c d$ ، $c'd'$) بحيث يشغل احد المستقيمين مثلاً ($a b$ ، $a'b'$) وضعية شاقولية . بما أن المستقيم ($a b$ ، $a'b'$) كيفي لذا يجب كما هو معروف أن نقوم بعمليتي نقل متتاليتين للمجموعة المفروضة : الأولى — موازية للمستوي H يصبح فيها المستقيم ($a_1 b_1$ ، $a'_1 b'_1$) جبهياً . والثانية — موازية للمستوي V يصبح فيها المستقيم (a_2b_2 ، $a'_2 b'_2$) شاقولياً . لنقطع المستقيمين ($a_2 b_2$ ، $a'_2b'_2$) و ($c_2 d_2$ ، $c'_2 d'_2$) بمستقيم عمودي عليهما ($m_2 n_2$ ، $m'_2n'_2$) ، بعد ذلك نوجد المستقيم ($m n$ ، $m'n'$) في وضعيته الأصلية الاولى . (الإنشاء مبين على الشكل) .

● **المثال ٢٠٨ :** ارسم خط تقاطع المستوي P مع الهرم (الشكل ٦٨٥) .

الحل : لإيجاد خط التقاطع يجب أن نوجد نقاط تقاطع أضلاع الهرم مع المستوي . بما أن أضلاع الهرم والمستوي P كيفية لذلك يفضل تغيير وضعية المجموعة بشكل يصبح فيه المستوي P_1 أمامياً . نرسم مستقيماً أفقياً في المستوي P وننقل المجموعة بصورة أفقية بحيث يشغل المستقيم الأفقي وضعية أمامية . وكذلك المستوي P_1 . برسم عناصر المجموعة المذكورة نوجد وفق قاعدة الإسقاط المعروفة ، خط التقاطع ($a_1b_1c_1d_1$, $a'_1b'_1c'_1d'_1$) للمستوي P مع الهرم . بعد ذلك نعين خط التقاطع في الوضع الأصلي الأول . (الإنشاء مبين على الشكل) .

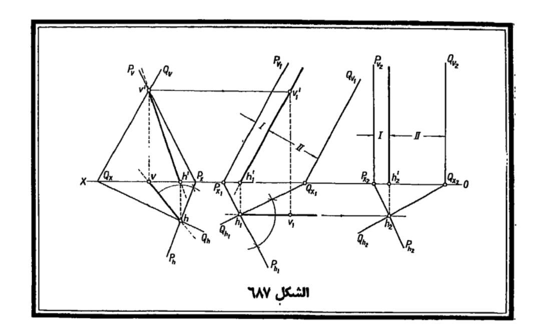
● **المثال ٢٠٩ :** أنشىء مساقط هرم سداسي منتظم ، تقع قاعدته في المستوي P إذا علمت أن طول ضلع قاعدته يساوي 10 mm ، وارتفاعه يساوي $h = 30$ mm (الشكل ٦٨٦) .

الحل : نرسم بصورة مبدئية مسقطي الهرم بشكل تقع فيه قاعدته في مستوي الإسقاط الأفقي . بنقل المستوي P إلى وضعية أمامية P_1 ، نرسم الهرم السابق بشكل تقع قاعدته في المستوي الأمامي P_1 . يتبقى علينا أن ننقل المجموعة بحيث يشغل المستوي P_1 الوضعية الأصلية . (الإنشاء مبين على الشكل) .

● **المثال ٢١٠ :** انقل المستويين P و Q إلى وضعية شاقولية (الشكل ٦٨٧) .

الحل : لكي يكون المستويان المفروضان P و Q عموديين على مستوي الاسقاط الأفقي يجب أن يكون فصلهما المشترك عمودياً على هذا المستوي . لهذا . نوجد الفصل المشترك للمستويين وكما بيّنا (انظر المثال ٢٠٠) وباستعمال انتقالين نحوله مع المجموعة كلها إلى وضعية شاقولية . في هـذه الوضعية للفصل المشترك

المستويان P_2 وQ_2 عموديان كذلك على المستوي H . (الإنشاء مبين على الشكل) .



الشكل ٦٨٧

ملاحظة : إذا كان الفصل المشترك للمستويين مستقيماً أفقياً أو جبهياً فالمسألة تحل بانتقال واحـد .

نتيجة : من تحليل المسائل المحلولة بطريقة الانتقال يبدو جلياً أن المهم في الموضوع إيجاد وضعية ملائمة للعناصر المفروضة بحيث يسهل حل المسألة . سندعو فيمابعد وضعية العناصر الهندسية بالنسبة لمستويات الاسقاط المفروضة والتي لاتتطلب أي إنشاءات إضافية بالوضعيات « الفضلى » للعناصر المفروضة ؟

مسائل

ملاحظة : حل المسائل التالية بطريقة الدوران والانتقال .

٣٧١ – ضع المستقيم AB في وضعية أفقية . (الشكل ٦٨٨ ، ٦٨٩) .

٣٧٢ – ضع المستقيم AB في وضعية جبهية (الشكل ٦٨٨ ، ٦٨٩) .

٣٧٣ – ضع المستقيم AB في وضعية شاقولية (الشكل ٦٩٠ ، ٦٩١) .

٣٧٤ – ضع المستقيم AB في وضعية أمامية (الشكل ٦٩١ ، ٦٩٢) .

٣٧٥ – ضع المستوي P في وضعية شاقولية (الشكل ٦٩٣ ، ٦٩٤) .

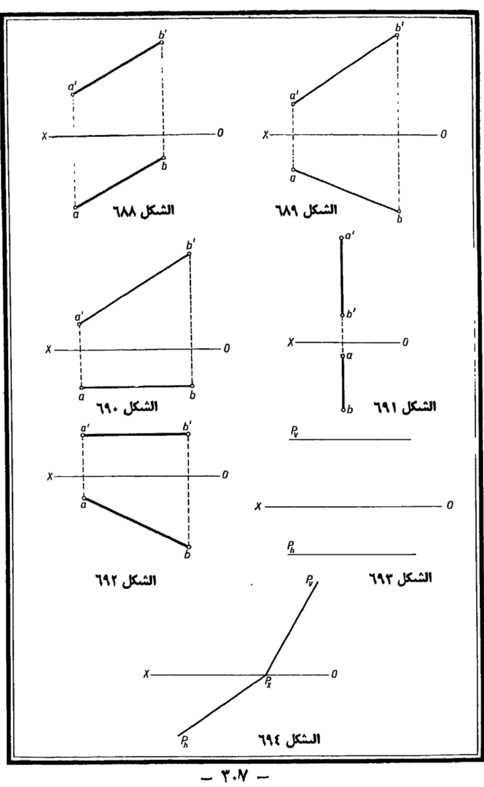
٣٧٦ – ضع المستوي P في وضعية أمامية (الشكل ٦٩٣ ، ٦٩٤) .

٣٧٧ – ضع المثلث ABC في وضعية يكون فيها المسقط الأفقي (الشاقولي) للمثلث بشكل خط مستقيم (الشكل ٦٠٠) .

٣٧٨ – ضع المستقيمين المتوازيين AB و CD في وضعية بحيث ينطبق مسقطاهما الشاقوليان (الأفقيان) (الشكل ٦٣٩) .

٣٧٩ – ضع المستقيمين AB و CD في وضعية بحيث يتوازى مسقطاهما الأفقيان (الشاقوليان) (الشكل ٥٧٨) .

٣٨٠ – ضع المستقيمين AB و CD في وضعية يصبح فيها المستقيم AB شاقولياً


a'
b'
X
0
a
b
الشكل ٦٨٨
الشكل ٦٨٩
الشكل ٦٩٠
الشكل ٦٩١
الشكل ٦٩٢
P_v
P_h
الشكل ٦٩٣
P_x
الشكل ٦٩٤

(الشكل ٥٧٨) أو أماميا (الشكل ١٤٤) .

٣٨١ ـ ضع المستويين QوP في وضعية شاقولية (الشكل ٣٩٣، ٣٩٤) أو أمامية (الشكل ٤٠٠، ٤٠٨) .

٣٨٢ ـ اقطع المستقيمين AB و CD بثالث MN عمودي على المستقيم AB بحيث يكون طول قطعة المستقيم MN الواقعة بين المستقيمين المفروضين مساوياً 20 mm (الشكل ٥٧٨) .

٣٨٣ ـ أوجد نقطة تقاطع المستقيم AB مع المستوي P (الشكل ٤٦٦، ٤٦٧) .

* * *

البحث الثامن عشر

الإنطباق . الدوران حول مستقيم أفقي وجبهي

أمثلـــة

● **المثال ٢١١** : لدينا الأثر الأفقي (P_h) للمستوي P والنقطة A من هذا المستوي . أوجد مطبق النقطـة A على مستوي الإسقاط الأفقي . لا تستعمل الأثر الشاقولي للمستوي (الشكل ٦٩٥) .

الحل : نمرر من النقطة (a,a') مستوياً R عمودياً على محور الدوران P_h ونوجد مركز الدوران (α,α') أي نقطة تقاطع المستوي R مع الأثر P_h . نعين الطول الحقيقي لنصف قطر الدوران ($a\alpha$, $a'\alpha'$) ثم نرسم من النقطة α قوساً نصف قطره r فيقطع الأثر R_h في النقطة المطلوبة A_o . معطى حل واحد .

نتائج : عند تطبيق مستوي على مستوي الإسقاط الأفقي نلاحظ أن :

١ ــ نصف قطر الدوران هو وتر مثلث قائم ، أحد ضلعيه القائمين هو بعد المسقط الأفقي للنقطة عن الأثر الأفقي للمستوي ، أما الضلع القائم الآخر فيساوي z النقطة .

٢ ــ يقع مطبق أي نقطة من المستوي P على الأثر الأفقي (R_h) لمستوي الدوران وعلى بعد يساوي نصف قطر الدوران .

٣ ــ في الحالة الخاصة عندما يكون المستوي ــ شاقولياً $a\alpha = o$ و $r = z$.

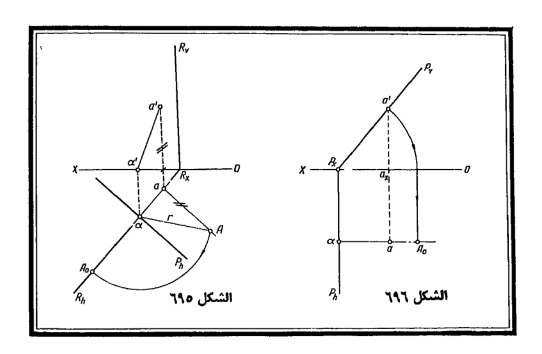
● **المثال ٢١٢** : لدينا مستوي أمامي P ونقطة A منه . أوجد مطبق النقطة A على المستوي

H (الشكل ٦٩٦) .

الحل : بما أن $a\alpha = P_x a_x$ فنصف قطر دوران النقطة (a, a') يساوي $P_x a'$.
لهذا نسقط من المسقط الأفقي (a) للنقطة عموداً على الأثر الأفقي (P_h) للمستوي، ونأخذ عليه $\alpha A_0 = P_x a'$. معطى حل واحد .

● **المثال ٢١٣ :** لدينا الأثر الشاقولي (P_v) للمستوي P ونقطة A من هذا المستوي . أوجد مطبق النقطة A على مستوي الإسقاط الشاقولي . لاتستعمل الأثر الأفقي للمستوي (الشكل ٦٩٧) .

الحل : نمرر من النقطة (a , a') مستوياً R عمودياً على محور الدوران P_v . نوجد مركز الدوران (β,β') أي نقطة تقاطع المستوي R مع الأثر P_v .



الشكل ٦٩٥ الشكل ٦٩٦

نعين الطول الحقيقي لنصف قطر الدوران ($a\beta$ ، $a'\beta'$) ثم نرسم من النقطة β' قوساً نصف قطره r فيقطع الأثر R_v في النقطة المطلوبة A_0 .

معطى حل واحد .

نتائج : عند تطبيق مستوي على مستوي الإسقاط الشاقولي نلاحظ أن :

١ ــ نصف قطر الدوران هو وتر مثلث قائم أحد ضلعيه القائمين هو بعد المسقط الشاقولي للنقطة عن الأثر الشاقولي للمستوي . أما الضلع القائم الآخر فيساوي y النقطة .

٢ ــ يقع مطبق أي نقطة من المستوي P على الأثر الشاقولي (R_v) لمستوي الدوران وعلى بعد يساوي نصف قطر الدوران .

٣ ــ في الحالة الخاصة عندما يكون المستوي أمامياً $a'\beta' = o$ و $r = y$.

● **المثال ٢١٤ :** لدينا مستوي شاقولي P ونقطة A منه . أوجد مطبق النقطة A على المستوي V (الشكل ٦٩٨) .

الحل : بما أن $a'\beta' = P_xa_x$ فنصف قطر دوران النقطة (a,a') يساوي P_xa . لهذا نسقط من المسقط الشاقولي (a') للنقطة عموداً على الأثر الشاقولي (P_v) للمستوي ونأخذ عليه $\beta'A_0 = P_xa$.

معطى حل واحد .

● **المثال ٢١٥ :** لدينا القطعة A والمستقيم MN . طبق النقطة A بدوران حول المستقيم MN على المستوي الأفقي T المار من المستقيم MN (الشكل ٦٩٩) .

الحل : نرسم من النقطة (a ، a′) مستوياً R عمودياً على محور الدوران (mn ، m′n′) ، ونوجد مركز الدوران (α,α′) أي نقطة تقاطع المستوي R مع المستقيم (mn ، m′n′) . نعين الطول الحقيقي لنصف قطر الدوران (aα , a′α′) ونرسم من النقطة α قوساً نصف قطره r فيقطع الأثر R_h في النقطة المطلوبة A_0 . (معطى حل واحد) .

نتيجة : إن نصف قطر الدوران هو وتر مثلث قائم أحد ضلعيه القائمين هو بعد المسقط الأفقي للنقطة عن المسقط الأفقي للمستقيم الأفقي ، أما الضلع القائم الآخر فيساوي بعد المسقط الشاقولي للنقطة عن المسقط الشاقولي للمستقيم الأفقي .

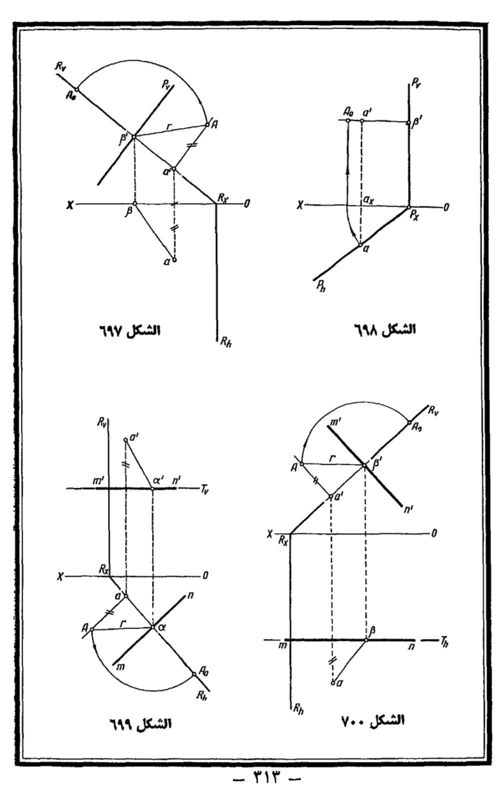
● **المثال ٢١٦ :** لدينا النقطة A والمستقيم MN . طبق النقطة A بدوران حول المستقيم MN على المستوي الجبهي T المار من المستقيم MN (الشكل ٧٠٠) .

الحل : نرسم من النقطة (a,a′) مستوياً R عمودياً على محور الدوران (mn,m′n′) . نوجد مركز الدوران (β,β′) أي نقطة تقاطع المستوي R مع المستقيم (mn،m′n′) . نعين الطول الحقيقي لنصف قطر الدوران (aβ , a′β′) ونرسم من النقطة β′ قوساً نصف قطره r فيقطع الأثر R_v في النقطة المطلوبة A_0.

نتيجة : إن نصف قطر الدوران هو وتر مثلث قائم أحد ضلعيه القائمين هو بعد المسقط الشاقولي للنقطة عن المسقط الشاقولي للمستقيم الجبهي ، أما الضلع القائم الآخر فهو بعد المسقط الأفقي للنقطة عن المسقط الأفقي للمستقيم الجبهي .

● **المثال ٢١٧ :** طبق المستوي P على مستوي الإسقاط الأفقي (الشكل ٧٠١) .

الحل : ندوّر المستوي P حول الأثر الأفقي (P_h) للمستوي . لإيجـــاد الأثر



الشكل ٦٩٧

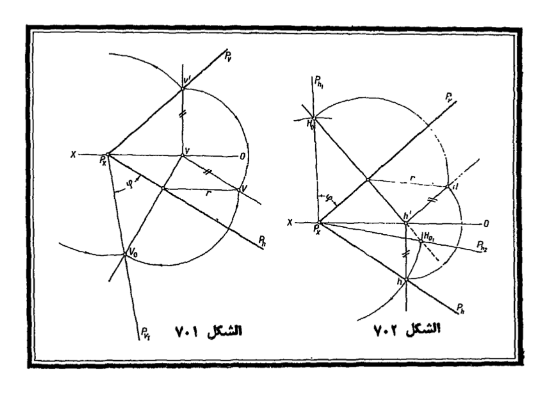
الشكل ٦٩٨

الشكل ٦٩٩

الشكل ٧٠٠

الشاقولي (P_{v1}) المطبق للمستوي نأخذ على الأثر P_v نقطة ما (v,v′) ثم نوجد مطبقها V_o على المستوي H . نرسم من النقطتين P_x و V_o مطبق الأثر الشاقولي المطلوب (P_{v1}) للمستوي .

الزاوية φ هي الزاوية الحقيقية بين أثري المستوي .



الشكل ٧٠١ — الشكل ٧٠٢

من الشكل نرى أن $P_x V_o = P_x v'$. باستعمال هذه العلاقة يمكن أن نبسط حل المسألة . نسقط من النقطة v عموداً على الأثر P_h ثم نرسم من النقطة P_x قوساً من دائرة نصف قطرها $P_x v'$ فيقطع العمود السابق في النقطة V_o . نرسم الأثر المطبق P_{v1} ماراً من النقطتين P_x و V_o .

● **المثال ٢١٨ :** طبق المستوي P على مستوي الإسقاط الشاقولي (الشكل ٧٠٢) .

الحل : ندوّر المستوي P حول الأثر الشاقولي (P_v) للمستوي . لإيجاد الأثر الأفقي المطبق (P_{h1}) للمستوي نأخذ على الأثر P_h نقطة ما (h,h') ثم نوجد مطبقها H_o على المستوي V . نرسم من النقطتين P_x و H_o الأثر الأفقي المطبق (P_{h1}) للمستوي .

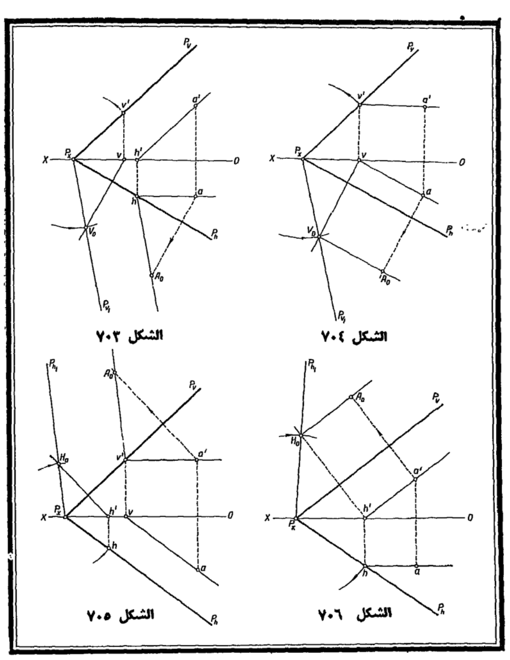
الزاوية φ هي الزاوية الحقيقية بين أثري المستوي .

من الشكل نرى أن $P_xH_o = P_xh$. باستعمال هذه العلاقة يمكن تسهيل حل المسألة . نسقط من النقطة h' عموداً على الأثر P_v ثم نرسم من النقطة P_x قوساً من دائرة نصف قطرها P_xh فيقطع العمود في النقطتين H_o و H_{o1} . نرسم الأثر المطبق P_{h1} من النقطتين P_x و H_o والأثر P_{h2} من النقطتين P_x و H_{o1} .

● **المثال ٢١٩ :** لدينا مستوي P ونقطة A منه . أوجد مطبق هذه النقطة على مستوي الإسقاط الأفقي بدون تعيين نصف قطر الدوران (الشكل ٧٠٣ ، ٧٠٤) .

الحل : الطريقة الأولى : : باستعمال مستقيم أفقي . نوجد النقطة V_o – مطبق النقطة (v,v') ونرسم منهـــا مطبق المستقيم الأفقي موازياً للأثر الأفقي (P_h) للمستوي . نسقط من النقطة a عموداً على الأثر P_h فيقطع مطبق المستقيم الأفقي في النقطة المطلوبة A_o .

الطريقة الثانية : باستعمال مستقيم جبهي . نوجد مطبق الأثر الشاقولي (P_{v1}) للمستوي ، نرسم من النقطة h مطبق المستقيم الجبهي موازياً لمطبق الأثر الشاقولي للمستوي . نسقط من النقطة a عموداً على الأثر P_h فيقطع مطبق المستقيم الجبهي في النقطة المطلوبة A_0 .



الشكل ٧٠٣

الشكل ٧٠٤

الشكل ٧٠٥

الشكل ٧٠٦

نتيجة : عند تطبيق مستوي على المستوي H فان وضعيةمطبق أي نقطة من المستوي تتعين بتقاطع مطبق المستقيم الرئيسي المار من النقطة مع العمود النازل من المسقط الأفقي للنقطـة على الأثر الأفقي للمستوي .

● **المثال ٢٢٠ :** لدينا مستوي P ونقطة A منه . أوجد مطبق هذه النقطة على مستوي الإسقاط الشاقولي بدون تعيين نصف قطر الدوران (الشكل ٧٠٥ و ٧٠٦).

الحل : الطريقة الأولى : نوجـــد مطبق الأثر الأفقي (P_{h1}) للمستوي ، ونرسم من النقطة v' مطبق المستقيم الأفقي موازياً للأثر P_{h1} . نسقط من النقطة a' عموداً على الأثر P_v فيقطع مطبق المستقيم الافقي في النقطة المطلوبة A_0 .

الطريقة الثانية : باستعمال مستقيم جبهي . نوجد النقطة H_0 مطبق النقطة (h,h') ونرسم منها مطبق المستقيم الجبهي موازياً للأثر الشاقولي (P_v) للمستوي . نسقط من النقطة a' عموداً على الأثر P_v فيقطع مطبق المستقيم الجبهي في النقطة المطلوبة A_0 .

نتيجة : عند تطبيق مستوي على المستوي V فمطبق أي نقطة من المستوي يتعين بتقاطع مطبق المستقيم الرئيسي المار من النقطة مع العمود النازل من المسقط الشاقولي للنقطة على الأثر الشاقولي للمستوي .

ملاحظة : على ضوء حلول المسائل الأخيرة كما نرى من المخططات إ ں من الصعب أن نحل المسألة العكسية . أي إذا أعطي مطبق النقطة على المستوي الأفقي (الشاقولي) فيمكن تعين مسقطي هذه النقطة (انظر الأمثلة التالية) .

● **المثال ٢٢١ :** لدينا مستوي P ومطبق نقطة A منه A_0 على مستوي الإسقاط الأفقي . أوجد مسقطي هذه النقطة (الشكل ٧٠٧) .

الحل : نوجد مطبق الأثر الشاقولي (P_{v1}) للمستوي ونرسم من النقطة A_0 مطبق مستقيم أفقي موازياً للأثر الأفقي (P_h) للمستوي فيقطع الأثر P_{v1} في النقطة V_0 . بمساعدة النقطة V_0 نوجد مسقطيها (v,v') ونرسم منها مسقطي المستقيم الأفقي (كيف ؟). بعد ذلك نسقط من A_0 عموداً على الأثر P_h فبتقاطعه مع المسقط الأفقي للمستقيم الأفقي نحصل على

المسقط الأفقي (a) للنقطة . بمعرفة ذلك نوجد المسقط الشاقولي (a') للنقطة .

يمكن حل المسألة بواسطة مستقيم جبهي .

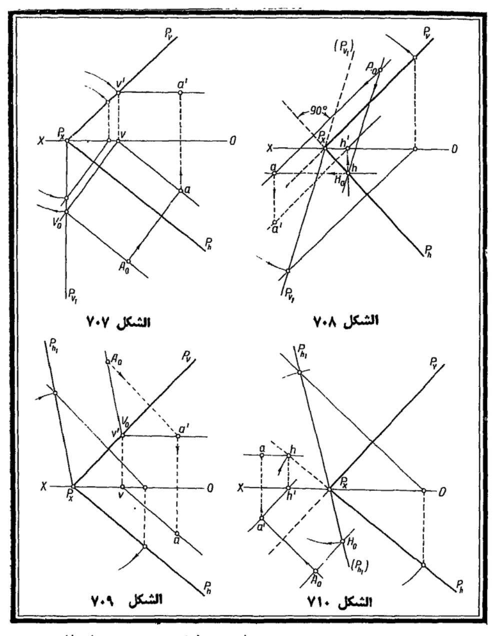
● **المثال ٢٢٢ :** لدينا مستوي P ومطبق نقطة A منه A_0 على المستوي H . اوجد مسقطي هذه النقطة (الشكل٧٠٨) .

الحل : النقطة A_0 تقع في الحقل الخلفي لمستوي الإسقاط الأفقي . نوجد مطبق الأثر الشاقولي (P_{v1}) للمستوي ونرسم من النقطة A_0 مطبق مستقيم جبهي موازياً للأثرالشاقولي (P_{v1}) للمستويفيقطع الأثر P_h في النقطة H_0 .من H_0 نوجدالمسقطين (h،h') ونرسم منها مسقطي المستقيم الجبهي (كيف ؟) . ننزل من النقطة A_0 عموداً على الأثر P_h فبتقاطعه مع المسقط الأفقي للمستقيم الجبهي نحصل على المسقط الأفقي (a) ثم المسقط الشاقولي (a') للنقطة . يمكن حل المسألة كذلك بمساعدة مستقيم أفقي .

● **المثال ٢٢٣ :** لدينا مستوي P ومطبق نقطة A منه A_0 على المستوي V . أوجد مسقطي هذه النقطة (الشكل ٧٠٩) .

الحل : نوجد مطبق الأثر الأفقي (P_{h1}) للمستوي ونرسم من النقطة A_0 مطبق مستقيم افقي موازياً لمطبق الأثر الأفقي (P_{h1}) للمستوي فيقطع الأثر P_v في النقطة V_0 . من النقطة V_0 نوجد مسقطيها (v,v') ثم نرسم منها مسقطي المستقيم الأفقي (كيف ؟) . نسقط من النقطة A_0 عموداً على الأثر P_v فبتقاطعه مع المسقط الشاقولي للمستقيمالافقي نحصل على المسقط الشاقولي (a') للنقطة . بمعرفة ذلك نوجد المسقط الأفقي (a) للنقطة .

يمكن حل المسألة بمساعدة مستقيم جبهي .

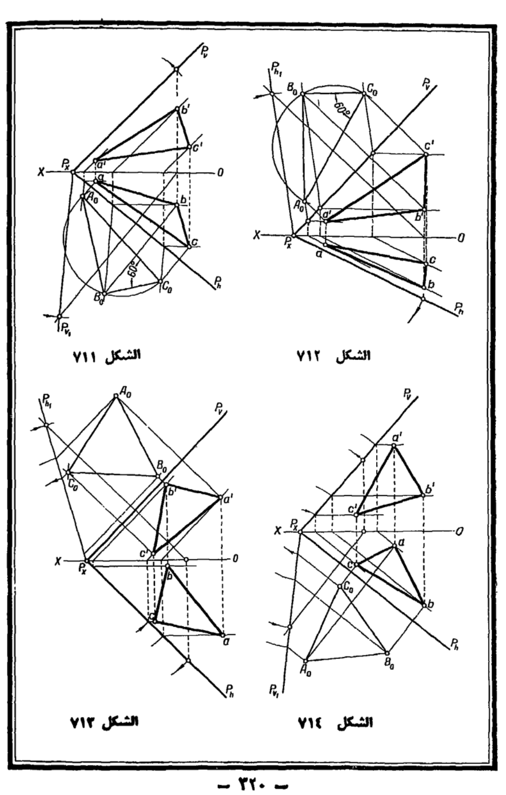


الشكل ٧٠٧ الشكل ٧٠٨

الشكل ٧٠٩ الشكل ٧١٠

● **المثال ٢٢٤ :** لدينا مستوي P ومطبق نقطـة A منه A_0 على المستوي V (الشكل ٧١٠) . أوجد مسقطي النقطة .

الحل : النقطة A_0 تقع في الحقل السفلي لمستويّ الإسقاط الشاقولي . نوجد



الشكل ٧١١

الشكل ٧١٢

الشكل ٧١٣

الشكل ٧١٤

مطبق الأثر الأفقي (P_{h1}) للمستوي ونرسم من النقطة A_0 مطبق مستقيم جبهي يوازي الأثر P_v فيقطع الأثر P_{h1} في النقطة H_0 . بمساعدة H_0 نوجد مسقطيه (h,h′) حيث نرسم منها مسقطي المستقيم الجبهي (كيف ؟) .

نسقط من النقطة A_0 عموداً على الأثر P_v فبتقاطعه مع المسقط الشاقولي للمستقيم الجبهي نحصل على المسقط الشاقولي (a′) للنقطة . بمعرفته نوجد المسقط الأفقي (a) للنقطة .

يمكن حل المسألة بمساعدة مستقيم افقي .

● **المثال ٢٢٥ :** أنشيء مسقطي مثلث قائم ABC واقع في المستوي P إذا علم المسقط الشاقولي للوتر AC والزاوية $C = 60°$ (الشكل ٧١١) .

الحل : نوجد المطبقين A_0 و C_0 للنقطتين (a ، a′) و (c ، c′) على المستوي H . نرسم الشكل الحقيقي للمثلث $A_0 B_0 C_0$ ، بعد ذلك بمعرفة B_0 نوجد مسقطيها (b ، b′) . بوصل النقطة (b ، b′) بالنقطتين (a ، a′) و(c ,c′) نحصل على مسقطي المثلث المطلوب (a b c) و (a′b′c′) .

إن هذه المسألة محلولة على الشكل ٧١٢ ، المستوي P مطبق على المستوي V . الانشاء مبين على الشكل .

● **المثال ٢٢٦ :** ارسم مسقطي مثلث متساوي الأضلاع ABC واقع في المستوي P إذا علم المسقط الأفقي للضلع AB (الشكل ٧١٣) .

الحل : نوجد المطبق $A_0 B_0$ لضلع المثلث على المستوي V . نرسم الشكل الحقيقي للمثلث $A_0 B_0 C_0$ وبمعرفة C_0 نوجد مسقطيها (c , c′) . نصل النقطة

(c,c′) بطرفي الضلـــع (a b ، a′b′) فنحصل على مسقطي المثلث المطلوب (a b c) و (a′b′c′) .

إن هذه المسألة محاولة على الشكل ٧١٤ . المستوي P مطبق على المستوي H.

● **المثال ٢٢٧ :** أوجد الشكل الحقيقي للمثلث ABC الواقـــع في المستوي P الموازي لخط الأرض إذا أعطي المسقط الأفقي للمثلث (الشكل ٧١٥) .

الحل : نوجد مسقطي المثلث (a′b′c′) و (a″b″c″) . نطبق المستوي P على مستوي الإسقاط الجنبي . نوجد مطبق النقطة A_o برفع عمود من المسقط الجنبي للنقطة على الأثر P_w وبأخذ قطعة $a'' A_o$ عليه تساوي x النقطة (a ، a′). وبصورة مشابهة نوجد النقطتين B_o و C_o وبوصل النقاط الحـــاصلة نحصل على الشكل الحقيقي $A_oB_oC_o$ للمثلث (a b c ، a′b′c′) .

يمكن حل المسألة بتطبيق المستوي P على المستوي H (الشكل ٧١٦) أو على المستوي V (الشكل ٧١٧) . الانشاء مبين على الشكل .

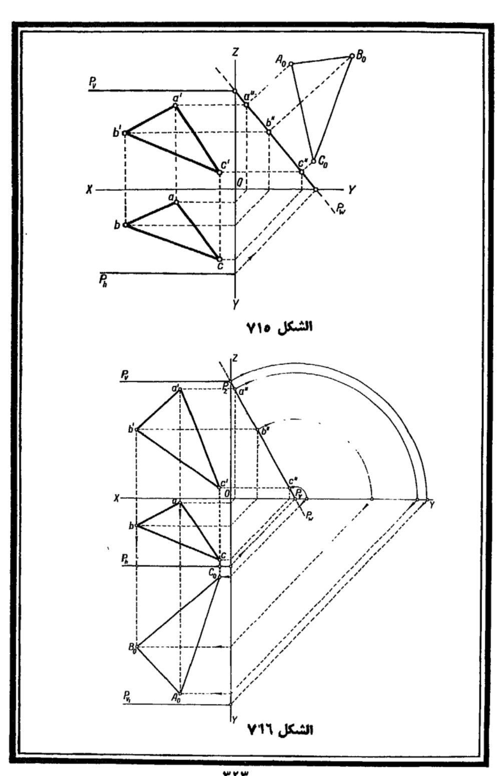
نعين قيم أنصاف أقطار الدوران لرؤوس المثلث بمساعدة مستوي الإسقـــاط الجنبي (كيف ؟) .

نتيجة : إن نصف قطر الدوران لأي نقطة في مستوي يوازي خط الأرض عند تطبيقه :

١ ــ على مستوي الإسقاط الجنبي يساوي الاحداثية x للنقطة .

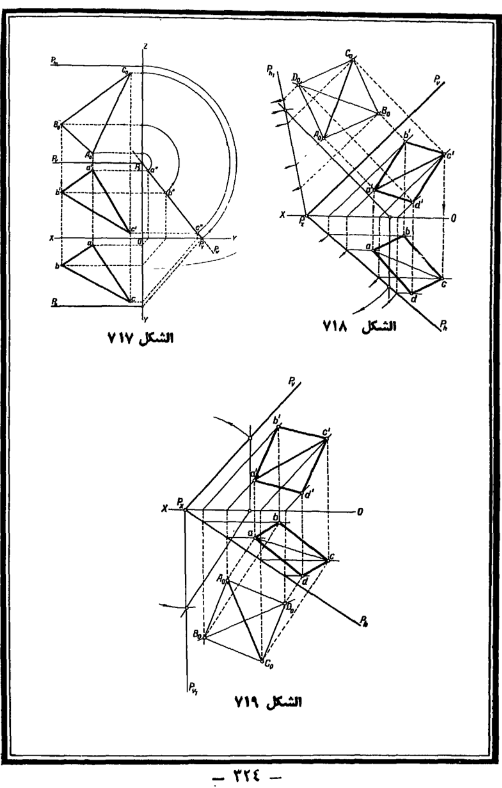
٢ ــ على مستوي الإسقاط الافقي يساوي $P_y a''$ ، $P_y b''$ ، $P_y c''$ الخ .

٣ ــ على مستوي الإسقاط الشاقولي يساوي $P_z a''$ ، $P_z b''$ ، $P_z c''$ الخ .



الشكل ٧١٥

الشكل ٧١٦



الشكل ٧١٧
الشكل ٧١٨
الشكل ٧١٩

• **المثال ٢٢٨ :** أنشيء مسقطي مربع ABCD واقع في المستوي P إذا أعطي المسقط الشاقولي لقطره AC (الشكل ٧١٨) .

الحل : نطبق المستوي P على مستوي الإسقاط الشاقولي ونعين مطبق النقطتين C_oوA_o. نرسم على القطر $A_o C_o$ مربعاً $A_oB_oC_oD_o$ وبعد ذلك بخطوات عكسية نعين مسقطي المربع (abcd)و(a'b'c'd') .

إن هذه المسألة محلولة على الشكل ٧١٩ حيث طبق المستوي P على H .

• **المثال ٢٢٩ :** انشيء مسقطي دائرة واقعة في المستوي P إذا علم مركزها C ونصف قطرها 20mm (الشكل ٧٢٠) .

الحل : تسقط الدائرة على مستويي الإسقاط H و V بشكل قطعين ناقصين قطرهما الكبير يساوي دائماً قطر الدائرة . بما أن الدائرة تقع في مستوي كيفي لذلك من المستحيل إيجاد قطر الدائرة الذي يسقط على كلا مستويي الإسقاط بقيمته الحقيقية . لهذا نعين على حدة قطري كل من القطعين الناقصين الواقعين في مستويي الإسقاط الأفقي والشاقولي . يسقط قطر الدائرة الأفقي على مستوي الإسقاط الأفقي بقيمته الحقيقية ويوافق القطر الكبير للقطع الناقص أما القطر العمودي عليه فيسقط بغير قيمته الحقيقية ويبقى متعامداً عليه مشكلاً القطر الصغير للقطع الناقص .

وبصورة مشابهة يسقط القطر الجبهي للدائرة على مستوي الإسقاط الشاقولي بقيمته الحقيقية ويوافق القطر الكبير للقطع الناقص اما القطر العمودي عليه فيسقط بغير قيمته الحقيقية ويبقى متعامداً عليه مشكلاً القطر الصغير للقطع الناقص .

طريقة الإنشاء : ١ ـ نطبق المستوي المفروض مثلاً على مستوي الإسقاط الأفقي ونعين مطبق النقطة C منه C_o ـ مركز الدائرة .

٢ – نرسم من C_o دائرة نصف قطرها 20 mm ، ونرسم فيها قطرين متعامدين الأول يوازي الأثر P_h والآخر عمودياً عليه ، كما نرسم قطرين متعامدين آخرين أحدهما يوازي P_v والثاني عمودياً عليه . بعد ذلك نعين المسقطين الأفقيين للقطرين الأولين ثم المسقطين الشاقوليين للقطرين الآخرين .

الإنشاء مبين على الشكل .

نتائج :

١ – المحاور الرئيسية للقطع الناقص على مستوي الإسقاط الأفقي هي المساقط الأفقية لقطرين متعامدين أحدهما يوازي المستوي H (أفقي) .

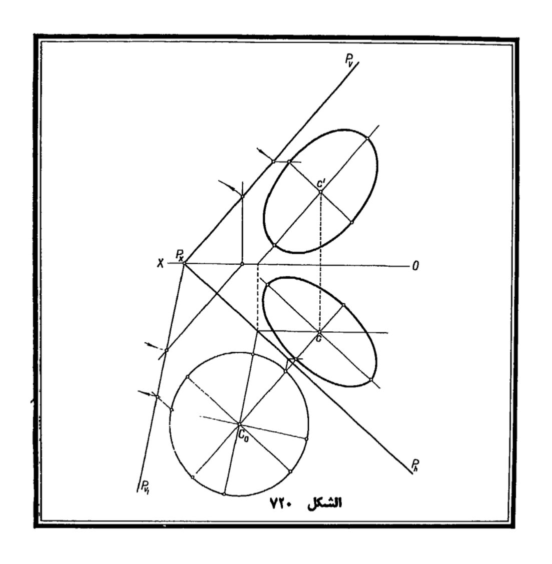
٢ – المحاور الرئيسية للقطع الناقص على مستوي الإسقاط الشاقولي هي المساقط الشاقولية لقطرين متعامدين أحدهما يوازي المستوي V (جبهي) .

● **المثال ٢٣٠ :** ارسم مسقطي مخروط دائري قائم تقع قاعدته في المستوي P علماً بأن نصف قطر القاعدة يساوي 20 mm وارتفاع المخروط h = 55 mm ومحوره ينطبق على المستقيم (1,1′) (الشكل ٧٢١) .

الحل : نوجد النقطة (c,c′) تقاطع المستقيم (1,1′) مع المستوي P أي مركز قاعدة المخروط . نطبق المستوي P على مستوي الإسقاط الشاقولي . بإيجاد مطبق النقطة C_o نرسم منها دائرة بنصف القطر المفروض 20 mm . بمعرفة مطبق قاعدة المخروط نوجد مسقطيها « للتفصيل انظر المثال ٢٢٩ » .

لإيجاد النقطة (s,s′) – ذروة المخروط – نأخذ على المستقيم (1,1′) ومن النقطة (c , c′) قطعة طولها 55 mm ثم نرسم مسقطي المولدات الجانبية (s و s′) مماسة لكل من القطعين الناقصين .

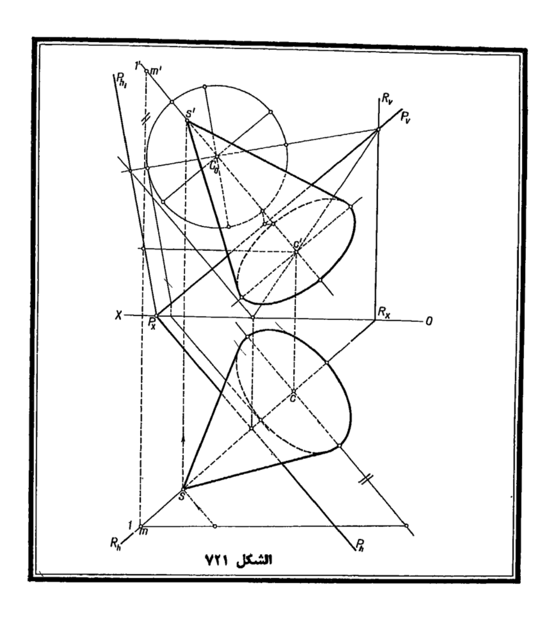
● **المثال ٢٣١ :** ارسم مسقطي مكعب قاعدته ABCD ، حيث ينطبق أحد أضلاعه



الشكل ٧٢٠

الجانبية على المستقيم (1,1′) إذا أعطي المسقط الشاقولي للقطر AC (الشكل ٧٢٢) .

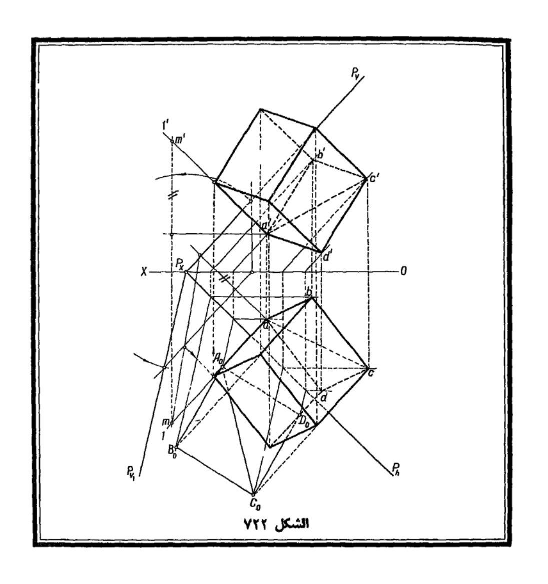
الحل : تقع قاعدة المكعب ABCD في المستوي P العمودي على المستقيم(1,1′) المار من النقطة (a ،a′) . بمعرفة المسقط الشاقولي (a′) لرأس (a,a′) القاعدة نوجد مسقطه الأفقي (a) على المسقط الأفقي للمستقيم (1،1′) . نرسم من النقطة (a,a′)مستوياً P،



الشكل ٧٢١

عمودياًعلىالمستقيم ('1،1) ونوجد المسقط الأفقي (ac) للقطر. نطبقهذا المستويعلى مستوي الإسقاط الأفقي ونوجد مطبق القطر A_0C_0 ثم نرسم عليه المربع $A_0B_0C_0D_0$ أي قاعدة المكعب بمعرفةالمطبق $A_0B_0C_0D_0$ لقاعدةالمكعبنوجدمسقطيها (abcd) و (a'b'c'd').

نرفع من النقاط (b,b') ، (c,c') ،(d،d') أعمدة على المستوي P ونأخذ عليها قطعاً



الشكل ٧٢٢

متساوية وتساوي ضلع القاعدة . ثم نصل نهايات هذه الأعمدة . على الشكل نبين الخطوط المرئية وغير المرئية .

● **المثال ٢٣٢ :** أسقط من C عموداً على المستقيم AB . حل المسألة بطريقة الدوران حول مستقيم **أفقي** وجبهي (الشكل ٧٢٣ ، ٧٢٤) .

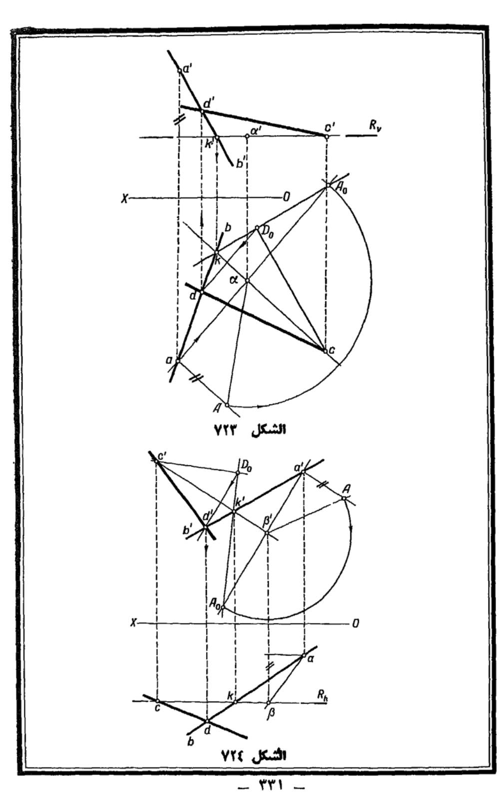
الحل :

١ ـ الدوران حول مستقيم أفقي :

نرسم من النقطة (c , c′) مستقيماً أفقياً يقطع المستقيم (ab, a′b′) في النقطة (k,k′) . بتدوير المستقيم المفروض حول المستقيم الأفقي نطبقه على المستوي الأفقي R المار من هذا المستقيم الأفقي . بما أن النقطة (k,k′) من المستقيم (ab,a′b′) واقعة في المستوي R لذلك يجب أن نوجد في هذا المستوي مطبق النقطة الاخرى (a,a′) . لهذا نسقط من النقطة a عموداً على المسقط الأفقي (c k) للمستقيم الأفقي ، ومن النقطة α وبنصف قطر αA يساوي نصف قطر الدوران للنقطة (a,a′) نرسم قوساً فيقطع العمود في النقطة A_0 . نصل النقطة k وA_0 بمستقيم $k A_0$ ونسقط عليه من النقطة c عموداً . في نقطة التقاطع نحصل على قاعدة العمود ـ النقطة D_0 . نسقط بصورة عكسية من النقطة D_0 عموداً على المسقط الأفقي (ck) للمستقيم الأفقي ، فبتقاطعه مع المستقيم ab نحصل على المسقط الأفقي (d) لقاعدة العمود . نوجد المسقط الشاقولي (d′) على المستقيم a′ b′ . نصل النقاط (c,c′) و (d,d′) فنحصل على المستقيم (cd,c′d′) :

٢ ـ الدوران حول مستقيم جبهي :

نرسم من النقطة (c,c′) مستقيماً جبهياً يقطع المستقيم (ab ,a′b′) في النقطة (k , k′) ، وبتدوير المستقيم المفروض حول المستقيم الجبهي نطبقه على المستوي الجبهي R المار من هذا المستقيم . بما أن النقطة (k,k′) من المستقيم (ab , a′b′) واقعة في المستوي R لذا يجب أن نعين في هذا المستوي نقطة اخرى (a,a′) منه . لهذا نسقط من النقطة a′ عموداً على المسقط الشاقولي (c′k′)



الشكل ٧٢٣

الشكل ٧٢٤

للمستقيم الجبهي ، ومن النقطة β' وبنصف قطر $\beta' A$ مساو لنصف قطر دوران النقطة (a,a') نرسم قوساً يقطع العمود في النقطة A_0 . نصل النقطتين k' وA_0 بالمستقيم $k'A_0$ونسقط عليه من النقطة c' عموداً،وفي نقطة التقاطع نحصل على أساس العمود ـ النقطة D_0 . نسقط بصورة عكسية من النقطة D_0 عموداً على المسقط الشاقولي ($c'k'$) للمستقيم الجبهي وبتقاطعه مع المستقيم $a'b'$ نجد المسقط الشاقولي (d') لأساس العمود بعدها نوجد المسقط الأفقي (d) على المستقيم ab . نصل النقطتين (c,c') و (d,d') فنحصل على المستقيم المطلوب .

نتيجة : يستحسن استعمال الدوران حول مستقيم أفقي أو جبهي عندما تعطى جميع العناصر في مستوي واحد .

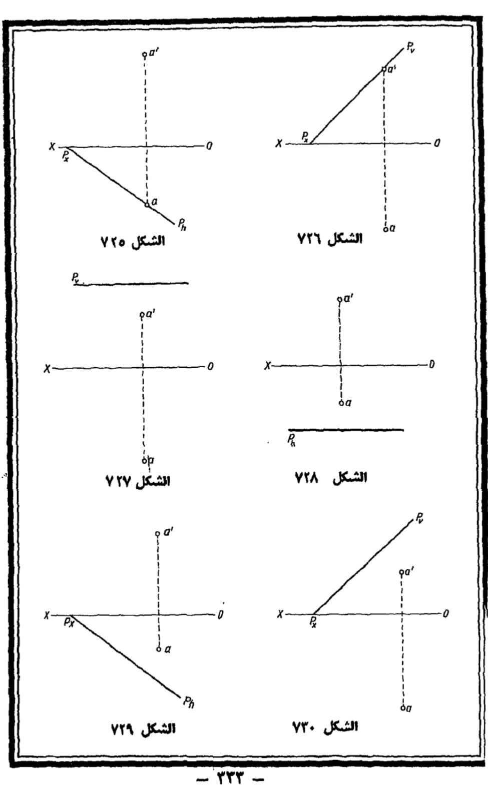
مسائـــل

٣٨٤ — طبق المستوي P على المستوي H ، ثم أوجد مطبق النقطة A منه (الشكل ٧٢٥ — ٧٣٠) .

٣٨٥ — طبق المستوي P على المستوي V ، ثم أوجد مطبق النقطة A منه (الشكل ٧٢٥ — ٧٣٠) .

٣٨٦ — ارسم مسقطي النقطة A الواقعة في المستوي P إذا علم مطبق النقطة A على المستوي H (الشكل ٧٣١ — ٧٣٤) .

٣٨٧ — ارسم مسقطي النقطة A الواقعة في المستوي P إذا علم مطبق النقطة A على المستوي V (الشكل ٧٣٥ — ٧٣٨) .



الشكل ٧٢٥

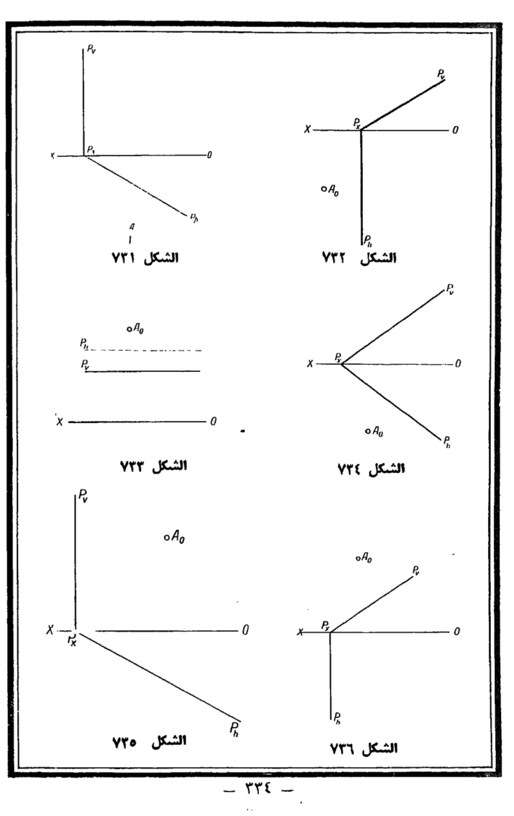
الشكل ٧٢٦

الشكل ٧٢٧

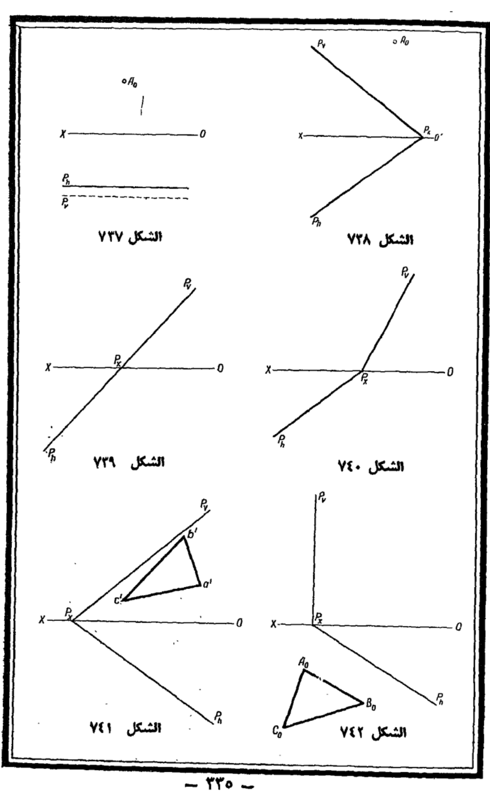
الشكل ٧٢٨

الشكل ٧٢٩

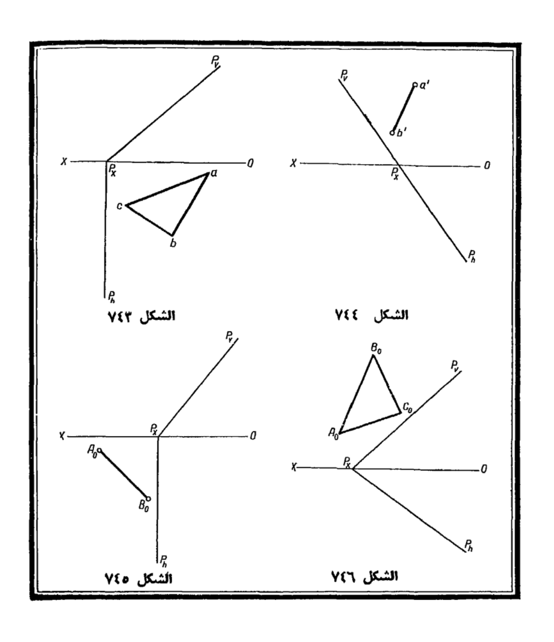
الشكل ٧٣٠



الشكل ٧٣١
الشكل ٧٣٢
الشكل ٧٣٣
الشكل ٧٣٤
الشكل ٧٣٥
الشكل ٧٣٦



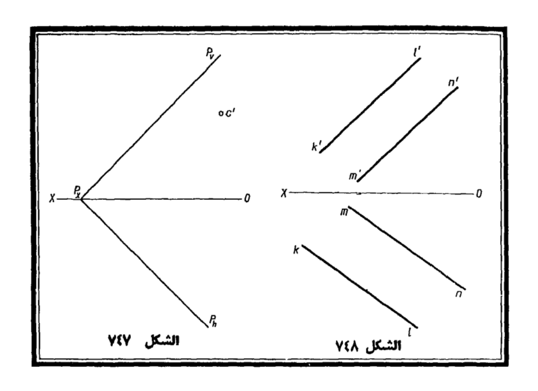
X
O
A_0
P_h
P_v
الشكل ٧٣٧
P_v
A_0
X
P_x
O'
P_h
الشكل ٧٣٨
P_v
X
P_x
O
P_h
الشكل ٧٣٩
P_v
X
P_x
O
P_h
الشكل ٧٤٠
P_v
b'
a'
c'
X
P_x
O
P_h
الشكل ٧٤١
P_v
X
P_x
O
A_0
B_0
C_0
P_h
الشكل ٧٤٢



الشكل ٧٤٣ — الشكل ٧٤٤ — الشكل ٧٤٥ — الشكل ٧٤٦

٣٨٨ – ارسم في المستوي P المحل الهندسي للنقاط المتساوية البعد عن اثري ذلك المستوي (الشكل ٧٣٩ ، ٧٤٠) .

٣٨٩ – ارسم المحل الهندسي لجميع نقاط الفراغ المتساوية البعد عن رؤوس



الشكل ٧٤٧ الشكل ٧٤٨

المثلث ABC (الشكل ٧٤١) .

٣٩٠ – ارسم مساقط المثلث ABC الواقـــع في المستوي P إذا علم مطبق المثلث على المستوي H (الشكل ٧٤٢) .

٣٩١ – عين مركز الدائرة المارة من رؤوس المثلث ABC الواقع في المستوي P (الشكل ٧٤٣) .

٣٩٢ – ارسم مساقط المربع ABCD الواقع في المستوي P إذا عرفت ضلعه AB (الشكل ٧٤٤) .

٣٩٣ – ارسم مساقط المثلث المتساوي الأضلاع ABC الواقع المستوي P إذا أعطي مطبق الضلع A_0B_0 على المستوي H (الشكل ٧٤٥) .

٣٩٤ – ارسم مساقط المثلث ABC الواقع في المستوي P إذا أعطي مطبق المثلث على المستوي V (الشكل ٧٤٦) .

٣٩٥ – ارسم في المستوي P المحل الهندسي للنقاط التي تبعد عن نقطة منه C بمقدار 20 mm (الشكل ٧٤٧) .

٣٩٦ – ارسم في المستوي P دائرة مركزها C وتمس الأثر الشاقولي لهـذا المستوي (الشكل ٧٤٧) .

٣٩٧ – ارسم دائرة نصف قطرها 20 mm في المستوي P وتمس أثريه (الشكل ٧٣٩)

٣٩٨ – ارسم دائرة مماسة داخلياً للمثلث ABC الواقع في المستوي P (الشكل ٧٤١).

٣٩٩ – ارسم دائرة مارة من رؤوس المثلث ABC الواقـع في المستوي P (الشكل ٧٤١) .

٤٠٠ – ارسم دائرة تمس أثري المستوي P وتمر من نقطة A من هذا المستوي . أعط حلاً واحداً (الشكل ٧٣٠) .

ملاحظة : حل المسائل ٤٠١ – ٤١٢ بدوران حول مستقيم أفقي أو جبهي

٤٠١ – أوجد الشكل الحقيقي للمثلث ABC (الشكل ٦١٥) .

٤٠٢ – ارسم منصف الزاوية A للمثلث ABC (الشكل ٦١٥) .

٤٠٣ – أوجد مركز الدائرة المرسومة داخل المثلث ABC (الشكل ٦١٥) .

٤٠٤ – أوجد مركز الدائرة المارة من رؤوس المثلث ABC (الشكل ٦١٥) .

٤٠٥ – أسقط عموداً من النقطة C على المستقيم AB (الشكل ٦٣٦ ، ٦٣٧) .

٤٠٦ – أوجد على المستقيم AB نقطة تبعد عن النقطة C بمقدار 25 mm (الشكل ٦٣٦ ، ٦٣٧) .

٤٠٧ – مرر من النقطة C مستقيماً يقطع المستقيم AB بزاوية φ تساوي 30° أو 45° أو 60° (الشكل ٦٣٧) .

٤٠٨ – ارسم مثلثاً متساوي الأضلاع ABC قاعدته BC تقع على المستقيم MN (الشكل ٦٥١) .

٤٠٩ – ارسم مثلثاً متساوي الساقين ABC قاعدته BC تقع على المستقيم MN إذا كانت الزوايا $B = C = \varphi$ (الشكل ٦٥١) .

٤١٠ – ارسم مربعاً ABCD ضلعه BC واقع على المستقيم MN (الشكل ٦٥٢) .

٤١١ – اقطع المستقيمين المتوازيين KL و MN بمستقيمين آخرين بحيث نحصل على مربع ABCD (الشكل ٧٤٨) .

٤١٢ – اقطع المستقيمين المتوازيين KL و MN بمستقيمين آخرين بحيث نحصل على معين ABCD زاويته الحادة $B = 60^\circ$ (الشكل ٧٤٨) .

البحث التاسع عشر

تبديل مستويات الإسقاط

عند تبديل أي مستوي إسقاط بآخر يجب المحافظة على التعامد بين مستويات الإسقاط الجديدة عندها مسقطا النقطة في الجملة الجديدة سيقعا على عمود واحد على خط الأرض الجديد .

عند تبديل مستوي الإسقاط الأفقي القديم بآخر جديد ($\frac{V}{H} \rightarrow \frac{V}{H_1}$) نجد أن :

١ ــ النقطة يمكن أن تنتقل من الربع الأول إلى الرابع ومن الثاني إلى الثالث وبالعكس .

٢ ــ وضعية المسقط الشاقولي للنقطة لا تتغير .

٣ ــ بعد المسقط الأفقي للنقطة عن خط الأرض في الجملة الجديدة والقديمة واحد لا يتغير ($a_1 a_{x1} = aa_x$) .

عند تغيير مستوي الإسقاط الشاقولي بآخر جديد ($\frac{V}{H} \rightarrow \frac{V_1}{H}$) نجد أن :

١ ــ النقطة يمكن أن تنتقل من الربع الأول إلى الثاني ومن الثالث إلى الرابع وبالعكس .

٢ ــ وضعية المسقط الأفقي للنقطة لا تتغير .

٣ ــ بعد المسقط الشاقولي للنقطة عن خط الأرض في الجملة الجديدة والقديمة واحد لا يتغير ($a'_1a_{x1} = a'a_x$) .

قاعدة : لايجاد المسقط الشاقولي (الأفقي) لنقطـــة على مستوي الاسقاط الشاقولي (الأفقي) الجديد يجب أن نسقط عموداً من المسقط الأفقي (الشاقولي) للنقطة على خط الأرض الجديد ومن نقطة التقاطع نأخـــذ بالاتجاه المناسب قطعة مساوية لبعد المسقط الشاقولي (الأفقي) القديم للنقطة عن خط الأرض القديم .

أمثلـــة

● **المثال ٢٣٣ :** النقطة A معطاة في الربـع الأول . أوجدمسقطيهـــا في الجملة $\frac{V_1}{H}$ (الشكل ٧٤٩) :

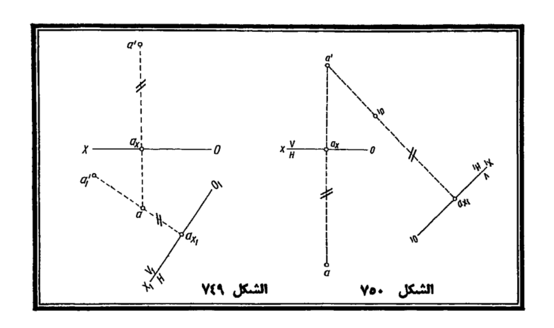
الحل : نعين قبل كل شيء في أي ربـع ستقع النقطـــة في الجملة الجديدة . المسقط الأفقي (a) للنقطة في الجملة القديمة يقع تحت خط الأرض أي في الحقل الأمامي لمستوي الإسقاط الأفقي . وفي الجملة الجديدة المسقط الأفقي (a) للنقطة يقع فوق خط الأرض (o_1x_1) أي في الحقل الخلفي لمستوي الإسقاط الأفقي.

بناء عليه فالنقطة المطلوبة في الجملة الجديدة ستقع في الربـع الثاني .

ولهذا نرسم من النقطة a عموداً على o_1x_1 ونأخذ عليه نحو الأعلى واعتباراً من النقطة a_{x1} قطعة مساوية $a' a_x$ فنهايتها تحدد المسقط الشاقولي الجديد (a_1') للنقطة .

● **المثال ٢٣٤ :** النقطة A معطاة في الربـع الأول . أوجـد مسقطيهـــا في الجملة $\frac{V}{H_1}$ (الشكل ٧٥٠) .

الحل : نعين في أي ربـع ستقع النقطة في الجملة الجديـدة . المسقط الشاقولي



الشكل ٧٤٩ الشكل ٧٥٠

(a′) للنقطة في الجملة القديمة يقع فوق خط الأرض أي في الحقل العلوي لمستوي الاسقاط الشاقولي . وفي الجملة الجديدة يقع المسقط الشاقولي (a′) للنقطـة تحت خط الأرض (o_1x_1) أي في الحقل السفلي لمستوي الإسقاط الشاقولي . بناء عليـه فالنقطة المطلوبة في الجملة الجديدة ستكون في الربع الرابع .

لهذا نرسم من النقطة a′ عموداً على o_1x_1 ونأخذ عليه نحو الأسفل إعتباراً من النقطة a_{x1} قطعة مساوية $a\,a_x$ ، فنهايتها تحدد المسقط الأفقي الجديد (a_1) للنقطة

● **المثال ٢٣٥ :** لدينا قطعة AB . أوجد مسقطيها الجديدين إذا كانت فى الجملة الجديدة تشغل وضعية جبهية (الشكل ٧٥١) .

الحل : حتى تكون القطعة موازية لمستوي الإسقاط الشاقولي يجب أن يكون مسقطها الأفقي موازياً لخط الأرض . نرسم خط الأرض o_1x_1 موازيـــاً للمسقط

الأفقي ($a b$) للقطعة وكما بيّنا سابقاً بايجاد المسقطين الشاقوليين (a'_1) و (b'_1) للنقطتين نحصل على المسقط الشاقولي ($a'_1b'_1$) للقطعة في الجملة الجديدة .

● **المثال ٢٣٦ :** لدينا قطعه AB . أوجد مسقطيها الجديدين إذا كانت في الجملة الجديدة تشغل وضعية أفقية (الشكل ٧٥٢) .

الحل : حتى تكون القطعة أفقية يجب أن يكون مسقطها الشاقولي موازياً لخط الأرض . نرسم خط الأرض o_1x_1 موازياً للمسقط الشاقولي ($a'b'$) للقطعة وكما بيّنا سابقاً بايجاد المسقطين الأفقيين (a_1) و (b_1) للنقطتين نحصل على المسقط الأفقي (a_1b_1) للقطعة في الجملة الجديدة .

● **المثال ٢٣٧ :** لدينا قطعة AB. أوجد مسقطيها الجديدين إذا كانت في الجملة الجديدة تشغل وضعية شاقولية (الشكل ٧٥٣) .

الحل : كي تكون القطعة شاقولية يجب أن يكون مسقطها الشاقولي عمودياً على خط الأرض . نرسم خط الأرض o_1x_1 عمودياً على المسقط الشاقولي ($a'b'$) للقطعة وكما بيّنا سابقاً نوجد مسقطها الأفقي (a_1b_1) بشكل نقطة .

● **المثال ٢٣٨ :** لدينا قطعة AB . أوجد مسقطيها الجديدين إذا كانت في الجملة الجديدة تشغل وضعية أمامية (الشكل ٧٥٤) .

الحل : كي تكون القطعة أمامية يجب أن يكون مسقطها الأفقي عمودياً على خط الأرض . نرسم خط الأرض o_1x_1 عمودياً على المسقط الأفقي ($a b$) للقطعة، وكما بيّنا سابقاً نوجد مسقطها الشاقولي ($a'_1b'_1$) بشكل نقطة .

● **المثال ٢٣٩ :** لدينا قطعة AB . أوجد مسقطيها الجديدين إذا كانت في الجملة

الجديدة تشغل وضعية أمامية (الشكل ٧٥٥) .

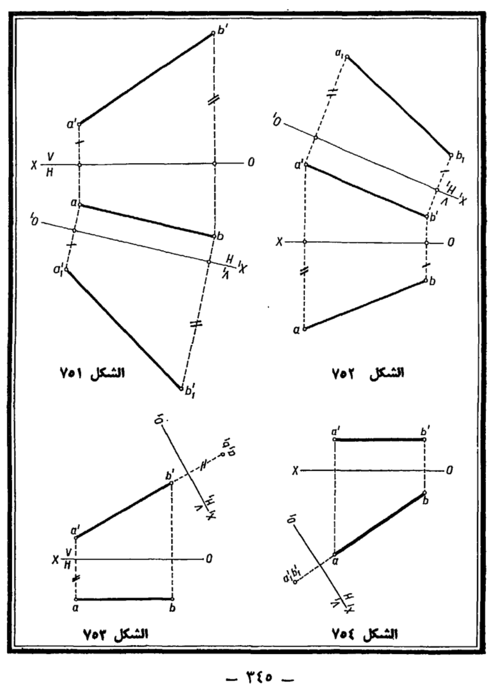
الحل : لحل المسألة يجب أن نستعمل على التوالي تبديلين لمستويات الإسقاط ($\frac{V}{H_1}$ ، $\frac{V_2}{H_1}$) . نرسم مسقطي القطعة (ab ، $a'b'$) في الجملة $\frac{V}{H_1}$ بحيث تشغل القطعة وضعية أفقية ، بعد ذلك نرسم مسقطي القطعة (a_1b_1،$a'b'$) في الجملة $\frac{V_2}{H_1}$ بحيث تشغل القطعة وضعية أمامية . الإنشاء مبين على الشكل .

● **المثال ٢٤٠ :** لدينا قطعة AB . أوجد مسقطيها الجديدين إذا كانت في الجملة الجديدة تشغل وضعية شاقولية (الشكل ٧٥٦) .

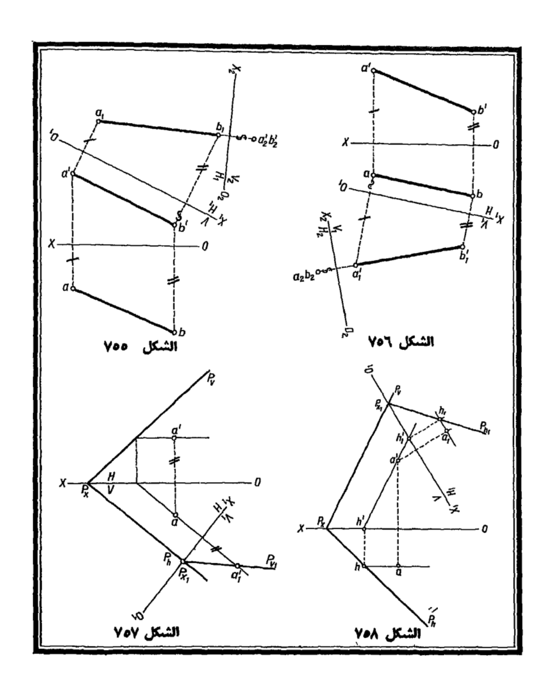
الحل : لحل المسألة يجب أن نستعمل على التوالي تبديلين لمستويات الإسقاط ($\frac{V_1}{H}$ ، $\frac{V_1}{H_2}$) . نرسم مسقطي القطعة (ab ، $a'b'$) في الجملة $\frac{V_1}{H}$ بحيث تشغل القطعة وضعيـــة جبهية بعد ذلك نرسم مسقطي القطعة (ab ، $a'_1b'_1$) في الجملة $\frac{V_1}{H_2}$ بحيث تشغل القطعة وضعية شاقولية . الانشاء مبين على الشكل .

● **المثال ٢٤١ :** ارسم أثري المستوي P في الجملة $\frac{V_1}{H}$ (الشكل ٧٥٧) .

الحل : الأثر الأفقي (P_h) للمستوي يبقى دون تغيير . عند تقاطع الأثر الأفقي (P_h) للمستوي مع خط الأرض الجديد o_1x_1 نحصل على نقطة إلتقاء الأثرين الجديدة (P_{x1}) . حسب ماهو معطى P_h عمودي على o_1x_1 وهذا يعني انه في الجملة الجديدة يكون المستوي المفروض أمامياً . لإيجاد إتجاه الأثر الشاقولي الجديد (P_{v1}) نأخذ في المستوي نقطة ما (a،a') ونوجد مسقطها الشاقولي الجديد (a'_1) . نرسم من النقطتين P_{x1} و a'_1 الأثر الشاقولي الجديد (P_{v1}) للمستوي .



b'
a'
X
V
H
0
a
b
0'
H
X'
V
a'1
b'1
الشكل ٧٥١
a1
b1
0'
a'
b'
X
0
b
a
الشكل ٧٥٢
0'
b'
a'
X
V
H
0
a
b
الشكل ٧٥٣
a'
b'
X
0
b
a
0'
a'1b'1
الشكل ٧٥٤



الشكل ٧٥٥

الشكل ٧٥٦

الشكل ٧٥٧

الشكل ٧٥٨

● **المثال ٢٤٢ :** ارسم أثري المستوي P في الجملة $\frac{V}{H_1}$ (الشكل ٧٥٨)

الحل : الأثر الشاقولي (P_v) للمستوي سيبقى دون تغيير . عند تقاطع الأثر الشاقولي (P_v) للمستوي مع خط الأرض الجديد (o_1x_1) نحصل على نقطة إلتقاء الأثرين الجديدة (P_{x1}) . لإيجاد إتجاه الأثر الأفقي الجديد (P_{h1}) للمستوي نأخذ على المستوي باستخدام مستقيم جبهي نقطة ما (a,a′) ونعينها في الجملة الجديدة ثم نرسم من هذه النقطة مستقيماً جبهياً . بعد ذلك نعين الأثر الأفقي لهذا المستقيم الجبهي ثم نرسم الأثر الأفقي الجديد (P_{h1}) للمستوي من النقطتين h_1 و P_{x1} .

ملاحظة : أحياناً تخرج النقطة P_{x1} من حدود الشكل ، في هذه الحالة نستعمل مستقيمين جبهيين . وبإيجاد النقطتين h_1 و h_2 نرسم منهما الأثر P_{h1} .

● **المثال ٢٤٣ :** لدينا مستوي P . ارسم أثريه إذا كان في الجملة الجديدة عمودياً على المستوي H (الشكل ٧٥٩) .

الحل : من المعروف أن الأثر الشاقولي للمستوي الشاقولي يجب أن يكون عمودياً على خط الأرض . نرسم خط الأرض الجديد o_1x_1 عمودياً على الأثر P_v فنقطة التقاطع P_{x1} هي نقطة إلتقاء الأثرين الجديدة . لإيجاد اتجاه الأثر الأفقي الجديد (P_{h1}) للمستوي نأخذ على الأثر P_h نقطة ما (h,h′) ونوجد مسقطها الأفقي الجديد (h_1) . ومن النقطتين P_{x1} و h_1 نرسم الأثر الأفقي الجديد (P_{h1}) للمستوي .

● **المثال ٢٤٤ :** اسقط عموداً من النقطة C على المستقيم AB (الشكل ٧٦٠) .

الحل : ان اسقاط عمود من نقطة على مستقيم على المخطط مباشرة ممكن فقط في تلك الحالة إذا كان المستقيم المفروض موازياً لأحد مستويات الإسقاط (لماذا ؟) .

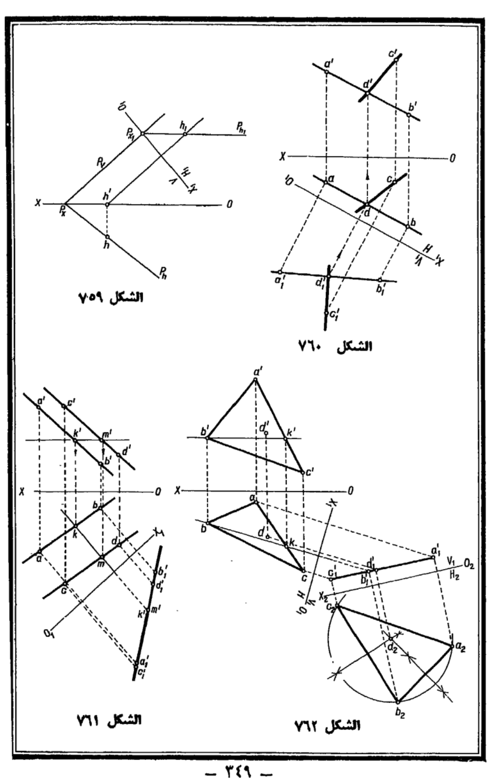
لهذا نبدل مثلاً المستوي الشاقولي بآخر جديد V_1 يوازي المستقيم AB . نرسم خط الأرض o_1x_1 موازياً (لماذا؟) للمستقيم ab ثم نوجد المسقط الشاقولي للمستقيم ($a'_1 b'_1$) وللنقطة (c'_1) . نسقط من النقطة c'_1 عموداً على المستقيم $a'_1b'_1$ وبتقاطعهما نحصل على المسقط الشاقولي (d'_1) للنقطة — أساس العمود . بإيجاد مسقطي أساس العمود الأولين (d،d') الأولين نرسم مسقطي العمود المطلوب : الأفقي — من النقطتين c و d والشاقولي — من النقطتين c' و d' .

● **المثال ٢٤٥** : بدّل مستويات الإسقاط بأخرى جديدة بحيث ينطبق المسقطان الشاقوليان للمستقيمين المتوازيين AB و CD (الشكل ٧٦١) .

الحل : يعين المستقيمان المتوازيان AB و CD مستوياً . فلكي ينطبق مسقطاهما الشاقوليان يجب أن يكون هذا المستوي في الجملة الجديدة أمامياً . نقطع المستقيمين (ab ، a'b') و (cd ، c'd') بمستقيم أفقي ما (km ، k'm') ، يرسم خط أرض جديد (o_1x_1) عمودي على المستقيم km (لماذا ؟) نعين المسقطين الشاقوليين الجديدين ($a_1'b'_1$) و ($c'_1 d'_1$) اللذان ينطبقان إذا تأمنت الدقـــة الكافية في الرسم .

● **المثال ٢٤٦** : أوجد مركز الدائرة المـــارة من رؤوس المثلث ABC (الشكل ٧٦٢) .

الحل : يقع مركز الدائرة المارة من رؤوس المثلث في نقطة تقاطع محاوره . لكي نرسم هذه المحاور يجب معرفة الشكل الحقيقي للمثلث . ولهذا يجب أن يكون مستوي المثلث موازياً لأحد مستويات الإسقـــاط مثلاً الأفقي . نستعمل تبديلين متتالين لمستويات الإسقاط . في البدء نبدل مستوي الإسقـاط الشاقولي



الشكل ٧٥٩

الشكل ٧٦٠

الشكل ٧٦١

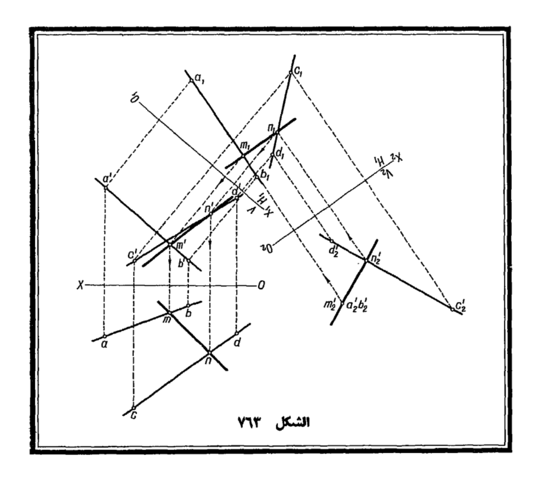
الشكل ٧٦٢

بآخر جديد (V_1) عمودي على مستوي المثلث ثم نبدل مستوي الإسقاط الأفقي بآخر جديد (H_2) موازي لمستوي المثلث . نرسم مستقيماً أفقياً (bk ,$b'k'$) في مستوي المثلث ونختار خط أرض جديد (o_1x_1) عمودي (لماذا ؟) على المسقط الأفقي (bk) للمستقيم الأفقي . نوجـــد المسقط الشاقولي للمثلث ($a'_1b'_1c'_1$) بشكل مستقيم .

بعد ذلك نرسم خط ارض جديد (o_2x_2) موازياً (لماذا ؟) للمسقط الشاقولي للمثلث ($a'_1b'_1c'_1$) ونوجد مسقطه الأفقي . المثلث $a_2b_2c_2$ يمثل الشكل الحقيقي للمثلث ABC . نوجد مركز الدائرة (d_2) المارة من رؤوس المثلث $a_2b_2c_2$ ثم نوجد مسقطي المركز (d,d') في الوضعية الأولى على المخطط . الإنشاء مبين على الشكل .

● **المثال ٢٤٧ :** اقطع المستقيمين المتخالفين AB وCD بمستقيم MN عمودي عليهما (الشكل ٧٦٣) .

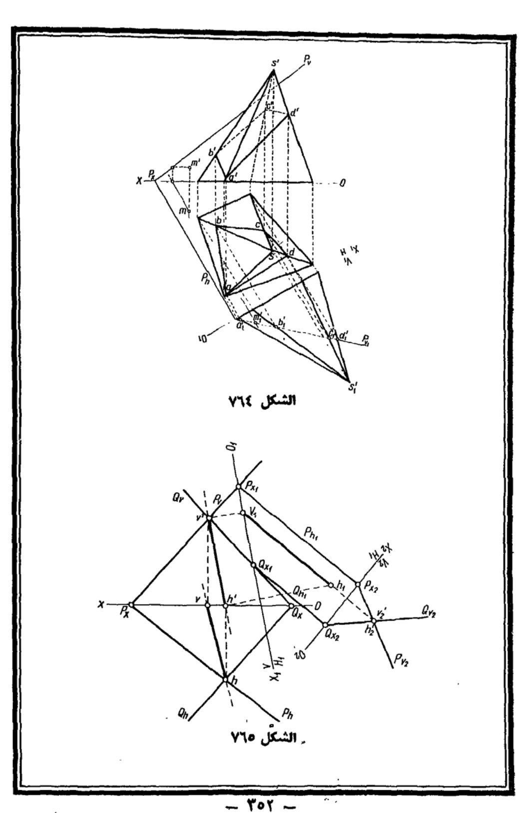
الحل : نبدل مستويات الإسقاط باخرى جديدة يكون فيها أحـد المستويات مثلاً الشاقولي عمودياً على المستقيم AB (أو على CD) : نبدل مستوي الإسقـــاط الأفقي بآخر جديد (H_1) يوازي AB لهذا نرسم خط الأرض (o_1x_1) موازيـــاً للمستقيم $a'b'$ ثم نوجد المسقطين الأفقيين (a_1b_1) و (c_1d_1) للمستقيمين المفروضين . نبدل مستوي الإسقاط الشاقولي بآخر جديد (V_2) عمودي على المستقيم A_1B_1 . لهذا نرسم خط الأرض (o_2x_2) عمودياً على المستقيم a_1b_1 ثم نوجد المسقطين الشاقولين ($a'_2b'_2$)و($c'_2d'_2$) للمستقيمين المفروضين . نقطع المستقيمين الحاصلين (a_1b_1 ,$a'_2b'_2$)و (c_1d_1 , $c'_2d'_2$) بمستقيم عمودي عليهما (m_1n_1,$m'_2n'_2$) ، بعد ذلك نوجد مسقطي



الشكل ٧٦٣

(mn,m'n') المستقيم المطلوب في وضعيته الأولى . الإنشاء مبين على الشكل .

ملاحظة : إذا كان أحد المستقيمين موازياً لأحد مستويات الإسقاط فيكفي تبديل واحد .



الشكل ٧٦٤

الشكل ٧٦٥

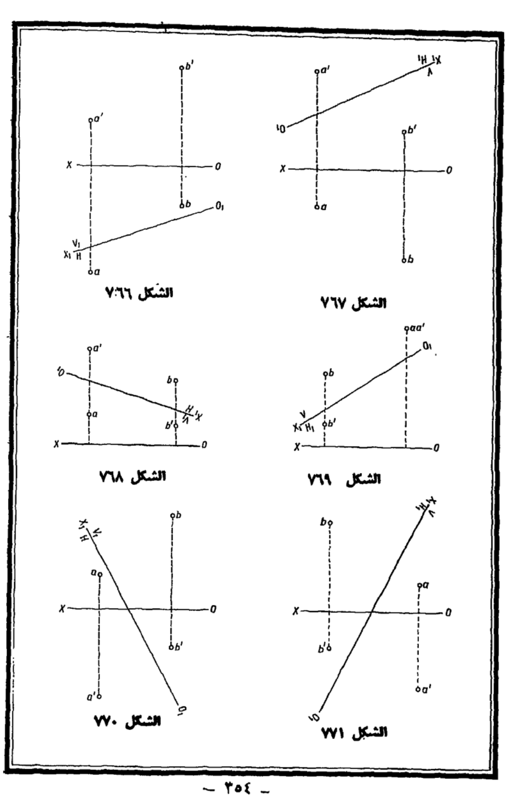
● **المثال ٢٤٨ :** أوجد خط تقاطع سطح هرم مع مستوي P (الشكل ٧٦٤) .

الحل : لرسم خط التقاطع يجب أن نبحث عن نقاط تقاطع حروف الهرم مع المستوي . بما ان المستوي P كيفي فيفضل تبديل مستويات الاسقاط بحيث يصبح المستوي P أمامياً في الجملة الجديدة . نبدل مستوي الإسقاط الشاقولي بآخر جديد (v_1) ونرسم خط الأرض (o_1x_1) عمودياً على الأثر P_h ثم نعين الأثر الشاقولي P_{v1} والمسقط الشاقولي للهرم . بإيجاد المسقط الشاقولي لخط التقاطع $(a'_1b'_1c'_1d'_1)$ نحصل على مسقطي خط التقاطع (abcd) و(a'b'c'd') في الوضعية الأولى على المخطط .الانشاء مبين على الشكل .

● **المثال ٢٤٩ :** بدّل مستويات الإسقاط بأخرى جديدة بحيث يصبح المستويان PوQ أمامين . (الشكل ٧٦٥) .

الحل : كي يكون المستويان P و Q أمامين يجب أن يكون مستوي الإسقاط الشاقولي الجديد عمودياً على الفصل المشترك للمستويين . نوجد الفصل المشترك (hv,h'v') للمستويين P و Q ،ثم نبدل مستوي الإسقاط الأفقي بآخرجديد (H_1) يوازي الفصل المشترك للمستويين . نرسم خط الأرض (o_1x_1) موازياً للمستقيم h'v' ونوجد الأثرين الأفقيين (P_{h1}) و (Q_{h1}) الموازيين للمستقيم h_1v_1 . بعد ذلك نبدل مستوي الإسقاط الشاقولي بجديد (v_2) . نرسم خط الأرض (o_2x_2) عمودياً على المستقيم h_1v_1 ثم نوجد الأثرين الشاقوليين (P_{v2}) و (Q_{v2}) للمستويين المفروضين المارين من النقطة $h'_2v'_2$.

ملاحظة : إذا كان المستويان متقاطعين وفق مستقيم أفقي أو جبهي فيكفي تبديل واحد (لماذا ؟) .



الشكل ٧٦٦

الشكل ٧٦٧

الشكل ٧٦٨

الشكل ٧٦٩

الشكل ٧٧٠

الشكل ٧٧١

اسئلة للاختبار الشخصي

١ – بماذا يقاس على المخطط بعد نقطة عن مستقيم شاقولي ؟

٢ – بماذا يقاس على المخطط بعد نقطة عن مستقيم أمامي ؟

٣ – ما هو أنسب وضع للعناصر في تعيين بعد نقطة عن مستقيم ؟

٤ – بماذا يقاس على المخطط البعد بين مستقيمين شاقولين ؟

٥ – بماذا يقاس على المخطط البعد بين مستقيمين أماميين ؟

٦ – ما هو أنسب وضع للعناصر عند تعيين البعد بين مستقيمين متوازيين ؟

٧ – بماذا يقاس على المخطط البعد بين مستقيمين متخالفين أحدهما شاقولي ؟

٨ – بماذا يقاس على المخطط البعد بين مستقيمين متخالفين أحدهما أمامي ؟

٩ – ما هو أنسب وضع للعناصر عند تعيين البعد بين مستقيمين متخالفين ؟

١٠ – بماذا يقاس على المخطط بعد نقطة عن مستوي شاقولي ؟

١١ – بماذا يقاس على المخطط بعد نقطة عن مستوي أمامي ؟

١٢ – ما هو أنسب وضع للعناصر عند تعيين بعد نقطة عن مستوي ؟

١٣ – بماذا يقاس على المخطط البعد بين مستويين متوازيين شاقولين ؟

١٤ – بماذا يقاس على المخطط البعد بين مستويين متوازيين أماميين ؟

١٥ – ما هو أنسب وضع للعناصر عند تعيين البعد بين مستويين متوازيين ؟

١٦ – بماذا تقاس على المخطط زاوية ميل مستوي شاقولي على مستوي الإسقاط الشاقولي؟

١٧ – بماذا تقاس على المخطط زاوية ميل مستوي أمامي على مستوي الإسقاط الأفقي؟

١٨ – ما هو أنسب وضع للمستويات عند تعيين زوايا ميلها على مستويات الإسقاط ؟

١٩ – بماذا تقاس على المخطط الزاوية بين مستويين شاقولين ؟

٢٠ — بماذا تقاس على المخطط الزاوية بين مستويين أماميين ؟
٢١ — ما هو أنسب وضع للمستويين عند تعيين الزاوية بينهما ؟ .

مسائل

٤١٣ — ارسم مساقط النقطتين A و B في الجملة الجديدة المفروضة (الشكل ٧٦٦ — ٧٧٣) .

٤١٤ — ارسم مسقطي المستقيم AB في الجملة الجديدة إذا وجب أن يكون أفقياً (الشكل ٧٧٤ ، ٧٧٥) .

٤١٥ — ارسم مسقطي المستقيم AB في الجملة الجديدة إذا وجب أن يكون جبهياً (الشكل ٧٧٤ ، ٧٧٥) .

٤١٦ — ارسم مسقطي المستقيم AB في الجملة الجديدة إذا وجب أن يكون شاقولياً (الشكل ٧٧٦ ، ٧٧٧) .

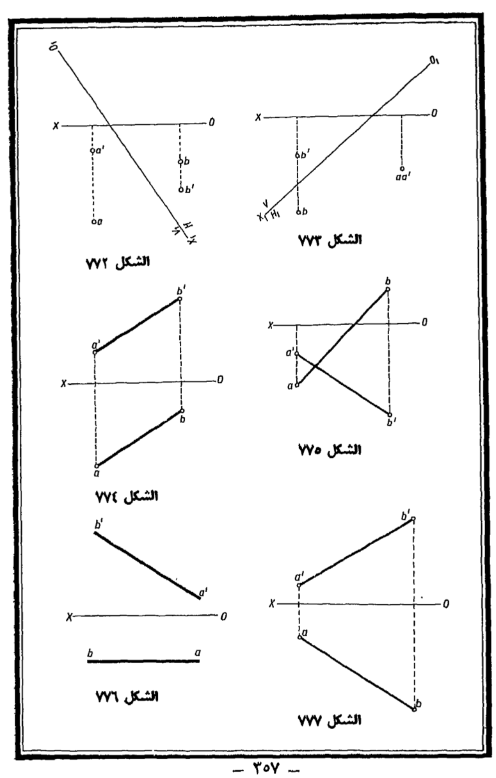
٧١٧ — ارسم مسقطي المستقيم AB في الجملة الجديدة إذا وجب أن يكون أمامياً (الشكل ٧٧٧ ، ٧٧٨) .

٤١٨ — ارسم أثري المستوي P في الجملة الجديدة المفروضة (الشكل ٧٧٩ ، ٧٨٠) .

٤١٩ — ارسم أثري المستوي P في الجملة الجديدة بحيث يصبح شاقولياً (الشكل ٧٣٩ ، ٧٤٠) .

٤٢٠ — ارسم أثري المستوي P في الجملة الجديدة بحيث يصبح أمامياً (الشكل ٧٣٩ ، ٧٤٠) .

٤٢١ — ارسم مساقط المستقيمين المتوازيين AB و CD في الجملة الجديدة ليكون مسقطاهما الافقيان منطبقين على بعضهما (الشكل ٦٣٩) .



الشكل ٧٧٢

الشكل ٧٧٣

الشكل ٧٧٤

الشكل ٧٧٥

الشكل ٧٧٦

الشكل ٧٧٧

٤٢٢ ـ ارسم مساقط المستقيمين المتوازيين AB و CD في الجملة الجديدة ليكون مسقطاهما الشاقوليان منطبقين على بعضهما (الشكل ٦٣٩) .

٤٢٣ ـ ارسم مساقط المستقيمين AB و CD في الجملة الجديدة ليكون مسقطاهما الأفقيان متوازيين (الشكل ٥٧٨) .

٤٢٤ ـ ارسم مساقط المستقيمين AB وCD في الجملة الجديدة ليكون مسقطاهما الشاقوليان متوازيين (الشكل ٥٧٨) .

٤٢٥ ـ ارسم مسقطي المثلث ABC في الجملة الجديدة بحيث يصبح مسقطه الأفقي خطاً مستقيماً (الشكل ٦٠٠) .

٤٢٦ ـ ارسم مسقطي المثلث ABC في الجملة الجديدة بحيث يصبح مسقطه الشاقولي خطاً مستقيماً (الشكل ٦٠٠) .

٤٢٧ ـ أوجد نقطة تقاطع المستقيم AB مع المستوي P (الشكل ٤٦٦ ، ٤٦٧) .

٤٢٨ ـ ارسم مسقطي المثلث ABC في الجملة الجديدة إذا كان مسقطه الأفقي يمثل الشكل الحقيقي للمثلث (الشكل ٦٠٠) .

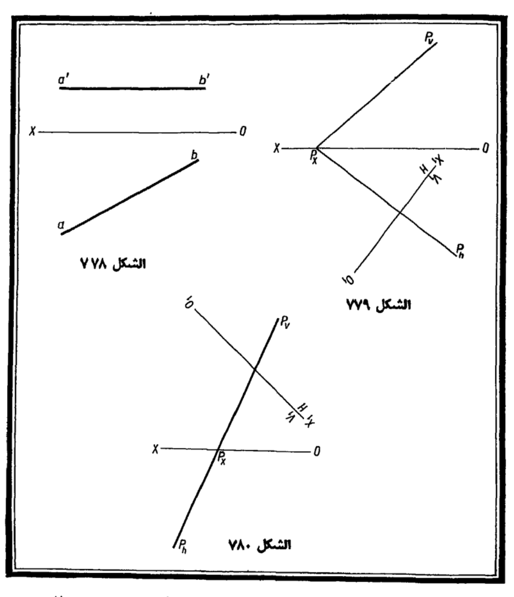
٤٢٩ ـ ارسم مسقطي المثلث ABC في الجملة الجديدة إذا كان مسقطه الشاقولي يمثل الشكل الحقيقي للمثلث (الشكل ٦٠٠) .

٤٣٠ ـ أوجد مركز ثقل محيط المثلث ABC (الشكل ٦٠٠) .

٤٣١ ـ أوجد مركز الدائرة المرسومة داخل المثلث ABC (الشكل ٦٠٠) .

٤٣٢ ـ أوجد مركز الدائرة المارة من رؤوس المثلث ABC (الشكل ٦٠٠) .

٤٣٣ ـ ارسم مساقط المستقيمين AB و CD في الجملة الجديدة بحيث يصبح المستقيم AB شاقولياً (الشكل ٥٧٨) .



٤٣٤ ــ ارسم مساقط المستقيمين AB وCD في الجملة الجديدة بحيث يصبح المستقيم AB أمامياً (الشكل ١٤٤) .

٤٣٥ ــ اقطع المستقيمين AB و CD بمستقيم MN عمودي على المستقيم AB بحيث يكون طول القطعة المحصورة بين المستقيمين مساوياً 20 mm (الشكل ٥٧٨)

٤٣٦ ـ ارسم آثار المستويين P و Q في الجملة الجديدة إذا تطلب ان يكونا شاقوليين (الشكل ٣٩٣ ، ٣٩٤) .

٤٣٧ ـ ارسم آثار المستويين P و Q في الجملة الجديدة إذا تطلب أن يكونا أماميين (الشكل ٤٠٠ ، ٤٠٨) .

البحث العشرون

تعيين الأبعاد

يعين البعد بين نقطتين والمقاس بطول القطعة الواصلة بينها باحدى الطرق التالية :

١ ـ بانشاء مثلث قائم « انظر المثال ٣٣ » .

٢ ـ بالدوران أو الانتقال . وهنا يلزم تحويل القطعة إلى وضعيـــة موازية لأحد مستويات الإسقاط « انظر الأمثلة ١٩٦ و ١٩٧ » .

٣ ـ بالانطباق . وهنا يجب أن نضم القطعة في مستوي« وللأفضل شاقوليأو أمامي» ثم نطبق هذا المستوي على أحد مستويات الإسقاط .

٤ ـ بتبديل مستويات الإسقاط . وهنا يجب تغيير أحد مستويات ا لإسقاط بآخر جديد يوازي القطعة المفروضة . « انظر الأمثلة ٢٣٥ و ٢٣٦» .

امثـــــــــلة

● **المثال ٢٥٠ :** لدينا نقطتان A،B . عين البعد بينها (الشكل ٧٨١) .

الحل : نستعمل طريقة الانطباق . نمرر من النقطتين (a،a') و (b،b')

مستوياً شاقولياً R . نطبق هذا المستوي على مستوي الإسقاط الأفقي ، نوجـــد المطبقين A_0 وB_0 للنقطتين (a,a′) و (b,b′) ، وبوصلهما نحصل على البعد المطلوب.

يعين البعد بين نقطة ومستقيم باحدى الطرق التالية :

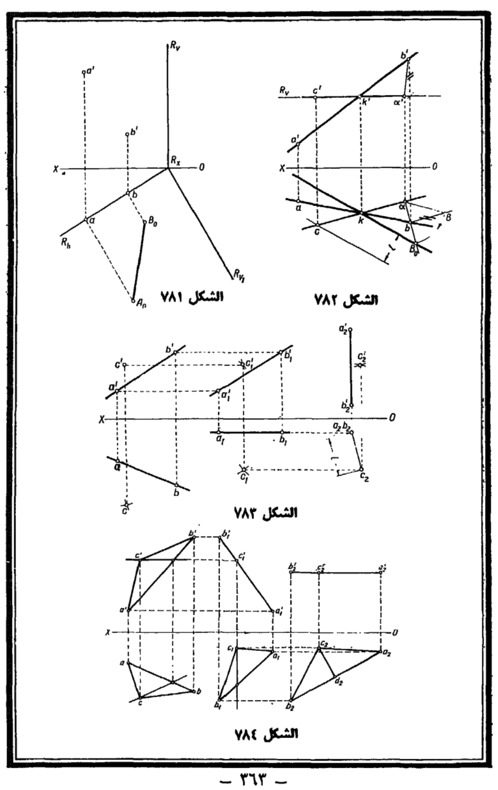
١ ـ بالطريقـة المباشرة : نرسم من النقطة مستوياً عمودياً على المستقيم ثم بايجاد نقطة تقاطع المستقيم مع المستوي نعين طول القطعة بين النقطتين ـ الجديدة والمفروضة « انظر المثال ١٧٠ » .

٢ ـ بالدوران أو الانتقال : يجب أن نرسم الجملة المفروضة في وضعية يكون فيها المستقيم المفروض عمودياً على أحد مستويات الإسقاط أو بحيث يصبح المستوي المعين بالمستقيم والنقطة موازياً لأحد مستويات الإسقاط .

٣ ـ بالانطباق : يجب أن نعين أحد آثار المستوي المعين بالمستقيم والنقطة ، ثم بالدوران حول هذا الأثر نوجد مطبق النقطة والمستقيم .

٤ ـ بالدوران حول مستقيم افقي أو جبهي : يجب أن نمرر من المستقيم الأفقي (الجبهي) في المستوي المعين بالعناصر المفروضة مستويـــاً R أفقياً (جبهياً) . ثم بالدوران حول المستقيم الأفقي (الجبهي) نوجـد مطبق النقطة والمستقيم على هذا المستوي .

٥ ـ بتبديل مستويات الإسقاط : يجب تبديل مستويات الإسقاط بـأخرى جديدة بحيث يكون أحدها عمودياً على المستقيم المفروض أو موازيـاً للمستوي المعين بالمستقيم والنقطة .

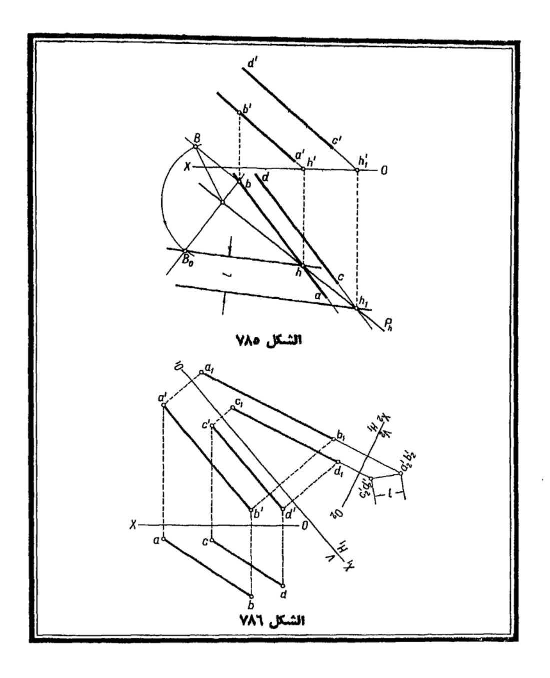


الشكل ٧٨١

الشكل ٧٨٢

الشكل ٧٨٣

الشكل ٧٨٤



الشكل ٧٨٥

الشكل ٧٨٦

● المثال ٢٥١ : عين بعد النقطة C عن المستقيم AB (الشكل ٧٨٢ - ٧٨٤) .

الحل : ١ – طريقة الدوران حول مستقيم أفقي (الشكل ٧٨٢) : نرسم

من النقطة (c,c′) مستقيماً أفقيــاً (ck . c′k′) يقطع المستقيم (ab , a′b′) في النقطــة (k,k′) ثم نضمه في مستوي أفقي R.

النقاط (c,c′) و (k,k′) تقع في المستوي R . لايجاد مطبق المستقيم على المستوي R يكفي أن نعين نقطة ما اخرى من هذا المستقيم ، مثلاً (b , b′) . نسقط من النقطة b عموداً على المستقيم ck ، وبنصف قطر مساو αB نرسم من النقطة α قوساً يقطع هذا العمود في النقطة B_0. بوصل النقطة k بـ B_0 نحصل على المطبق (kB_0) للمستقيم المفروض .

البعد المطلوب هو القطعة l .

٢ ــ طريقة الانتقال (الشكل ٧٨٣ ، ٧٨٤) : ننقل العناصر المفروضــة بصورة أفقية ونوضع المستقيم في وضعية جبهية . بعد ذلك ننقلها بصورة جبهية ونوضع المستقيم في وضعية شاقولية . البعد المطلوب l هو البعد بين النقطتين c_2 و a_2b_2 . الإنشاء موضح على الشكل .

باستعمال الانتقال يمكن ان نحل المسألة بالطريقة التالية كذلك : نضم النقطة (c ,c′) والمستقيم (ab . a′b′) في مثلث (abc و a′b′c′) وبانتقالين متتاليين نحوله الى وضعية افقية مثلاً .

البعد المطلوب هو ارتفاع المثلث $a_2b_2c_2$ أي c_2d_2 . الانشاء مبين على الشكل .

يمكن تعيين البعد بين مستقيمين متوازيين باحدى الطرق المذكورة أعلاه لتعيين بعد نقطة عن مستقيم .

● **المثال ٢٥٢ :** أوجد البعد بين مستقيمين متوازيين AB وCD (الشكــل ٧٨٥ ، ٧٨٦) .

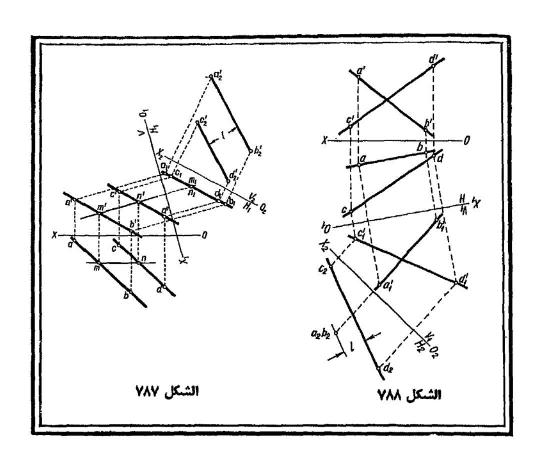
الحل : ١ - طريقة الانطباق (الشكل ٧٨٥) : نعين الآثار الأفقية (h, h') و (h_1, h'_1) للمستقيمين $(ab, a'b')$ و $(cd, c'd')$ ونرسم من هاتين النقطتين الأثر الأفقي (P_h) للمستوي المعين بالمستقيمين المفروضين. بالدوران حول الأثر P_h نوجد مطبق المستقيمين $(ab, a'b')$ و $(cd, c'd')$ على مستوي الإسقاط الأفقي . بما أن نقطة واحدة (h, h') من المستقيم $(ab, a'b')$ تقع في مستوي الاسقاط الأفقي نوجد المطبق B_o للنقطة (b, b') فالنقطتان h و B_o تعينان hB_o مطبق المستقيم $(ab, a'b')$. نعين مطبق المستقيم $(cd, c'd')$ برسم مستقيم من النقطة h_1 موازياً للمستقيم hB_o (لماذا ؟) . البعد l بينهما هو البعد المطلوب .

٢ - طريقة تبديل مستويات الإسقاط (الشكل ٧٨٦ ، ٧٨٧) : نبدل مستوي الإسقاط الأفقي بآخر جديد (H_1) يوازي المستقيمين المفروضين . بعد ذلك نبدل مستوي الإسقاط الشاقولي بآخر جديد (V_2) عمودي على هذين المستقيمين ، فالبعد l بين المسقطين الشاقوليين $(c_2'd_2')$ و (a'_2b_2') للمستقيمين هو البعد المطلوب . الإنشاء مبين على الشكل .

باستعمال طريقة تبديل مستويات الإسقاط يمكن حل المسألة أيضاً بالشكل التالي : نبدل مستوي الإسقاط الأفقي بآخر جديد (H_1) عمودي على المستوي المعين بالمستقيمين AB و CD بعد ذلك نبدل مستوي الإسقاط الشاقولي بآخر جديد (V_2) مواز للمستوي المفروض . فالبعد l بين المستقيمين المتوازيين $a'_2b'_2$ و $c_2'd_2'$ هو البعد المطلوب . الانشاء مبين على الشكل .

البعد بين مستقيمين متخالفين يمكن أن يتعين بإحدى الطرق التالية :

١ - بالطريقة المباشرة : برسم مستو R من أحد المستقيمين المفروضين مواز للمستقيم الآخر ، ثم بتعيين البعد من نقطة ما من المستقيم الثاني حتى المستوي



الشكل ٧٨٧

الشكل ٧٨٨

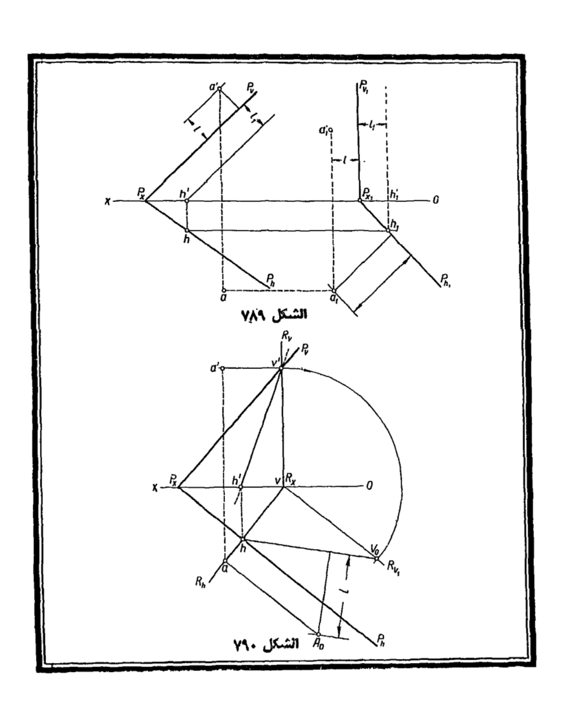
٢ ــ بالدوران أو الانتقال : يجب رسم المستقيمين المفروضين في وضعية يكون فيها أحد المستقيمين عمودياً على أحد مستويات الإسقاط .

٣ ــ بتبديل مستويات الإسقاط : يجب تبديل مستويات الإسقاط بشكل يكون فيه أحدها عمودياً على أحد المستقيمين المفروضين .

● **المثال ٢٥٣ :** عين البعد بين المستقيمين المتخالفين AB و CD (الشكل ٧٨٨) .

الحل : طريقة تبديل المستويات :

نبدّل مستوي الإسقاط الشاقولي بآخر جديد (V_1) يوازي المستقيم AB . بعد ذلك



الشكل ٧٨٩

الشكل ٧٩٠

نبدل مستوي الإسقاط الأفقي بآخر جديد H_2) عمودي على المستقيم نفسه ، فالبعد l بين المسقطين الأفقيين للمستقيمين هو البعد المطلوب . الإنشاء مبين على الشكل .
يمكن تعيين بعد نقطة عن مستوي بإحدى الطرق التالية :

١ ـ بالطريقة المباشرة : بإسقاط عمود من النقطة على المستوي نوجد أساس العمود ثم نعين المسافة بين النقطة المفروضة وأساس العمود .

٢ ـ بالدوران أو الإنتقال : يجب رسم الجملة المفروضة في وضعية يكون فيها المستوي عمودياً على أحد مستويات الإسقاط .

٣ ـ بالإنطباق : نمرر من النقطة مستوياً شاقولياً أو أمامياً عمودياً على المستوي المفروض . نطبق المستوي المساعد على أحد مستويات الإسقاط ونوجد مطبق النقطة المفروضة والفصل المشترك للمستويين ، فالبعد l بينهما هو البعد المطلوب .

٤ ـ بتبديل مستويات الإسقاط : يجب تبديل أحد مستويات الإسقاط بآخر جديد عمودي على المستوي المفروض .

● **المثال ٢٥٤ :** عين بعد النقطة A عن المستوي P (الشكل ٧٨٩ ، ٧٩٠) .

الحل : طريقة الانتقال (الشكل ٧٨٩) : نرسم في المستوي P مستقيماً جبهياً ما وننقله بصورة موازية للمستوي V مع الجملة كلها ، بحيث يأخذ وضعية شاقولية . نأخذ على خط الأرض نقطة ما P_{x1} ونرسم منها الأثر الشاقولي(P_{v1}) بصورة عمودية على خط الأرض . ثم نرسم بصورة موازية له وعلى بعد l المسقط الشاقولي للمستقيم الجبهي . الوضعية الجديدة a_1' للنقطة (a،a') تقع على بعد l من الأثر P_{v1} وعلى بعد ما من خط الأرض . بمساعدة a_1' نحصل على a_1 . نرسم الأثر الأفقي (P_{h1}) من

النقطتين P_{x1} و h ، فالعمود النازل من النقطة a_1 على الأثر P_{h1} يعين البعد المطلوب .

٢ – طريقة الانطباق (الشكل ٧٩٠) : نرسم من النقطة (a،a′) مستوياً شاقولياً R عمودياً على P . نوجد الفصل المشترك (hv,h′v′) للمستويين P و R. وبتطبيق المستوي R على مستوي الاسقاط الافقي (الشاقولي) نوجد المطبق A_o للنقطة (a,a′) و hV_o للمستقيم (hv,h′v′) . نسقط من النقطة A_o عموداً على hV_o فالقطعة l هي البعد المطلوب .

ملاحظة : يمكن أن نرسم من النقطة A مستوياً أمامياً R الخ .

● **المثال ٢٥٥ :** عين بعد النقطة K عن مستوي المثلث ABC (الشكل٧٩١).

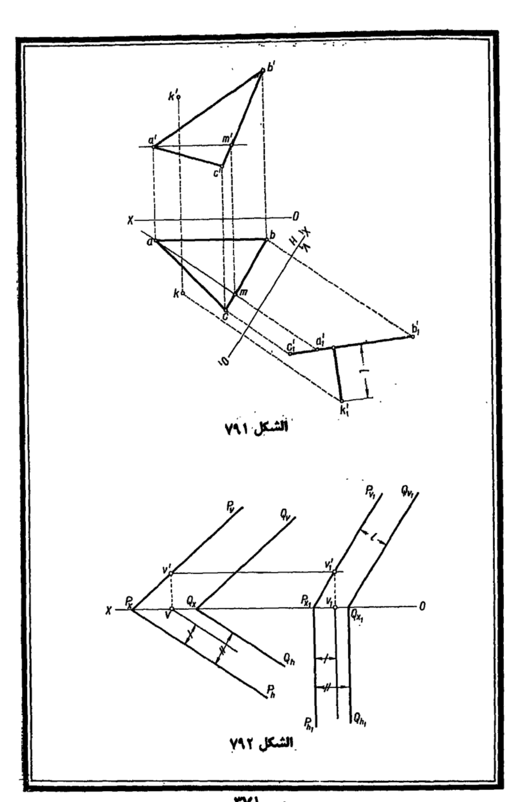
الحل : طريقة تبديل مستويات الإسقاط : نبدل مستوي الإسقاط الشاقولي بآخر جديد (V_1) . نرسم من الرأس (a ، a′) مستقيماً افقياً (am،a′m′) في مستوي المثلث ثم نرسم خط ارض جديد (o_1x_1) عمودياً على المسقط الأفقي (am) للمستقيم الأفقي .

نوجد المسقط الشاقولي (k_1') للنقطة (k,k′) والمسقط الشاقولي ($a_1'b_1'c_1'$) للمثلث (abc،a′b′c′) . نسقط من k_1' عموداً على المسقط الشاقولي $a_1'b_1'c_1'$ للمثلث . القطعة l هي البعد المطلوب .

البعد بين مستويين متوازيين يمكن أن يعين باحدى الطرق المستخدمة في تعيين بعد نقطة عن مستوي .

● **المثال ٢٥٦ :** عين البعد بين مستويين متوازيين P و Q (الشكل ٧٩٢) .

الحل : بطريقة الانتقال نحول المستويين المفروضين إلى وضعية أمامية (شاقولية).



الشكل ٧٩١

الشكل ٧٩٢

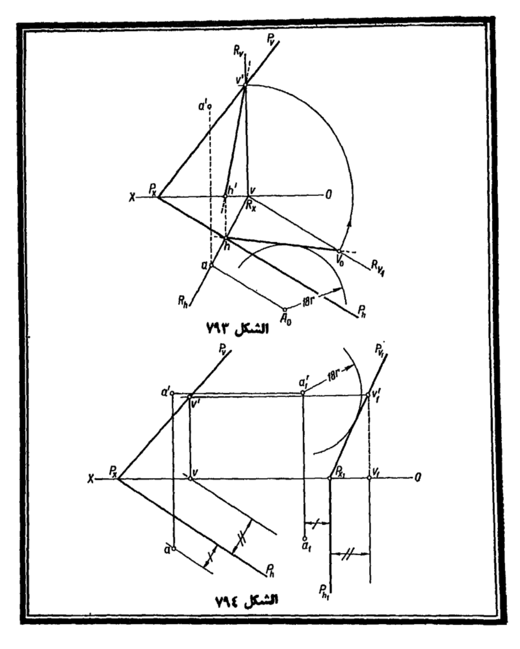
نرسم في المستوي P مستقيماً أفقياً ثم ننقل الجملة كلها بصورة موازية لمستوي الإسقاط الأفقي ، ونوضع المستقيم الأفقي في وضعية أمامية . البعد l بين الأثرين الشاقوليين (P_{v1}) و (Q_{v1}) هو البعد المطلوب . الإنشاء مبين على الشكل .

ملاحظة : بهذه الطريقة يمكن أن نعين البعد بين مستقيمين متخالفين .

● **المثال ٢٥٧ :** لدينا نقطة A والأثر الأفقي (P_h) للمستوي P الذي يبعد عن النقطة A بمقدار 18mm . أوجد الأثر الشاقولي لهـــذا المستوي (الشكل ٧٩٣ ، ٧٩٤) .

الحل : ١ ـ طريقة الانطباق (الشكل ٧٩٣) : نرسم من النقطة (a،a′) مستوياً شاقولياً R عمودياً على المستوي P . نطبق هذا المستوي على مستوي الإسقاط الأفقي (الشاقولي) ونوجد النقطة A_o والأثر R_{v1} . بما أن البعد بين النقطـــة والمستوي يقاس ببعد النقطة عن الفصل المشترك للمستويين P و R لذلك نرسم من النقطة A_o دائرة نصف قطرها 18 mm ثم نرسم من النقطة h تقاطع الأثرين P_h و R_h مستقيماً يمس هذه الدائرة ، فيقطع الأثر R_{v1} في النقطة V_o (معطى حل واحد) . بعد ذلك نوجد ′v على الأثر R_v بمساعدة V_o ثم نرسم من النقطتين P_x و ′v الأثر الشاقولي المطلوب (P_v) .

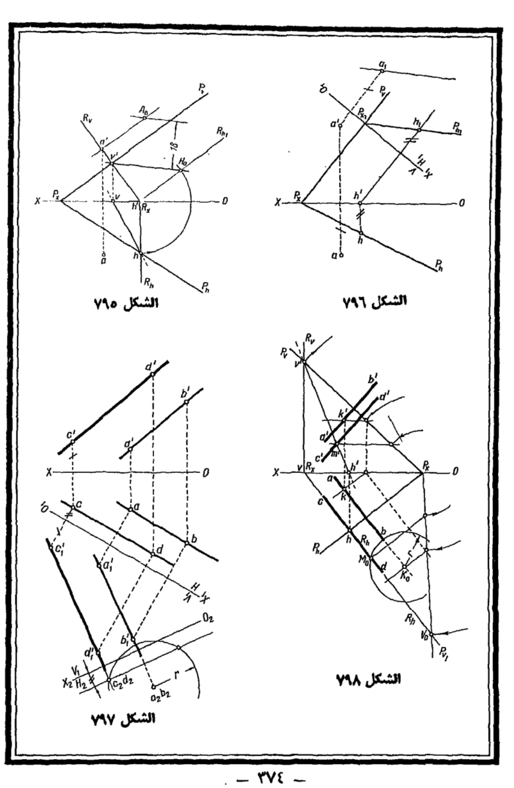
٢ ـ طريقة الانتقال (الشكل ٧٩٤) : ننقل الجملة المفروضة بصورة موازية لمستوي الإسقاط الافقي ونحولها إلى وضعية يكون فيها المستوي P أماميـــاً . بافتراض وضعيـة المسقط الأفقي (a_1) للنقطـة والأثر الأفقي (P_{h1}) للمستوي نوجد المسقط الشاقولي (a_1') للنقطة . بما أن البعد بين النقطة والمستوي الأمامي على المخطط يقـاس بالبعـد بـــين المسقط الشاقولي للنقطة والأثر الشاقولي للمستوي



الشكل ٧٩٣

الشكل ٧٩٤

لذلك نرسم من a'_1 دائرة نصف قطرها 18 mm ثم نرسم من النقطة P_{x1} الاثر P_{v1} مماساً لهذه الدائرة (معطى حل واحد) .



الشكل ٧٩٥

الشكل ٧٩٦

الشكل ٧٩٧

الشكل ٧٩٨

نرسم مستقيماً أفقياً ما في المستوي P_1، وبايجاد وضعيته الأولية نرسم من النقطتين P_x و v' الأثر الشاقولي المطلوب (P_v) للمستوي .

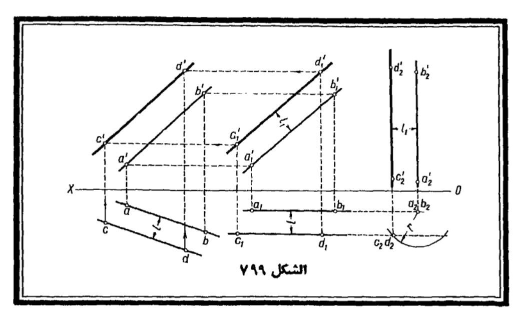
● **المثال ٢٥٨ :** لدينا مستوي P والمسقط الشاقولي للنقطة A التي تبعد عن المستوي P بمقدار 18 mm . أوجد المسقط الأفقي لهذه النقطة (الشكل ٧٩٥ ، ٧٩٦) .

الحل : ١ – طريقة الإنطباق (الشكل ٧٩٥) : نرسم من النقطة (a،a′) مستوياً أمامياً R عمودياً على المستوي P ، وبتطبيقه على مستوي الإسقاط الشاقولي نوجد المستقيم $v'H_0$ الفصل المشترك للمستويين P و R . بما أن مطبق النقطة A_0 يجب أن يبعد 18 mm عن المستقيم $v'H_0$ ويقع على العمود المرفوع من النقطة a′ على الأثر R_v لذلك نرسم بصورة موازية للمستقيم $v'H_0$ مستقيماً مساعداً على بعد 18 mm (معطى حل واحد) ، وبتقاطعه مع العمود نحصل على النقطة A_0 ، وبمعرفة A_0 نوجد المسقط الافقي (a) للنقطة A .

٢ – طريقة تبديل مستويات الإسقاط (الشكل ٧٩٦) : نبدل مستوي الإسقاط الأفقي بآخر جديد (H_1) عمودي على المستوي P . برسم مستقيم مساعد مواز للأثر P_{h1} وعلى بعد 18 mm منه نجد عند تقاطعه مع العمود المنزل من المسقط الشاقولي (a′) للنقطة على o_1x_1 النقطة a_1 . بمساعدة النقطة a_1 نوجد المسقط الأفقي المنشود (a) للنقطة .

● **المثال ٢٥٩ :** لدينا المستقيم AB والمسقط الأفقي (cd) للمستقيم CD الموازي للمستقيم AB . أوجد المسقط الشاقولي للمستقيم CD إذا كان البعد بين المستقيمين المفروضين مساوياً $l$mm (الشكل ٧٩٧ – ٧٩٩) .

الحل : ١ – طريقة تبديل مستويات الإسقاط (الشكل ٧٩٧) : بتبديل



الشكل ٧٩٩

مستويات الإسقاط بأخرى جديدة تجعل مستوي الاسقاط الأفقي عمودياً على المستقيمين المفروضين . في هذه الحالة يقاس البعد بين المستقيمين بالبعد بين المسقطين الأفقيين ($a_2 b_2$) و ($c_2 d_2$) الممثلين بشكل نقاط . ومنه : نبدل مستوي الإسقاط الشاقولي بآخر جديد (V_1) يوازي المستقيمين المفروضين ونوجد مبدئياً فقط المسقط الشاقولي ($a'_1b'_1$) للمستقيم AB . بعد ذلك نبدل مستوي الإسقاط الأفقي بآخر جديد (H_2) عمودي على المستقيمين المفروضين ونوجد من جديد فقط المسقط الأفقي (a_2b_2) لذلك المستقيم . نرسم من هذه النقطة دائرة نصف قطرها l mm كما نرسم مستقيماً موازياً لخط الأرض ($o_2 x_2$) وعلى بعد $c\, c_{x1}$ فنحصل بتقاطعه مع الدائرة على النقطة c_2 وهي بحد ذاتها d_2 — المسقط الأفقي (c_2d_2) للمستقيم CD (معطى حل واحد) . بإيجاد المسقط الشاقولي

($c'_1d'_1$) للمستقيم بإنشاء معاكس نحصل على مسقطه الشاقولي ($c'd'$) في الوضعية الأولى .

٢ ــ طريقة الانطباق (الشكل ٧٩٨) : نأخذ على المستقيم ($ab,a'b'$) نقطة ما (k,k') ونرسم منها مستوياً P عمودياً على هذا المستقيم . لإيجاد أساس المستقيم CD على المستوي P أي (m,m') ، نضم هذا المستقيم في مستوي شاقولي R ونوجد المستقيم ($hv,h'v'$) الفصل المشترك للمستويين . بتطبيق المستوي P على مستوي الإسقاط الأفقي (الشاقولي) نعين النقطة k_0 ، ومن هذه النقطة نرسم دائرة نصف قطرها $l$mm فتقطع المستقيم hV_0 في النقطة M_0 أساس المستقيم ($cd,c'd'$) على المستوي P .

نوجد المسقط الشاقولي (m') لهذه النقطة ونرسم منها المسقط الشاقولي ($c'd'$) للمستقيم . (معطى حل واحد) .

٣ ــ طريقة الانتقال (الشكل ٧٩٩) : ننقل الجملة المفروضة بصورة موازية لمستوي الإسقاط الأفقي ونحولها إلى وضعية يكون فيها المستقيم AB جبهياً . بعد ذلك ننقل الجملة بصورة موازية لمستوي الإسقاط الشاقولي ونحولها إلى وضعية يصبح فيها المستقيم AB شاقولياً . في هذه الحالة المسقطان الأفقيان للمستقيمين سيتحولان إلى نقطتين (a_2b_2) و (c_2d_2) البعد بينهما يجب أن يساوي $l$mm ومنه لإيجاد النقطة (c_2d_2) نرسم من النقطة (a_2b_2) دائرة نصف قطرها $l$mm ، وبتقاطعها مع المستقيم c_1d_1 الموازي لخط الأرض نحصل على النقطة (c_2d_2) المسقط الأفقي للمستقيم CD (معطى حل واحد) . بإيجاد المسقط الشاقولي ($c'_2d'_2$) للمستقيم وبإنشاء معاكس نحصل على مسقطه الشاقولي ($c'd'$) في وضعيته الأولى .

مسائل

٤٣٨ – عين البعد بين النقطتين A و B (الشكل ٨٠٠ – ٨٠٣) .

٤٣٩ – أوجد المسقط الناقص للنقطة B إذا كان البعد بين النقطتين A و B مساوياً 25 mm (الشكل ٨٠٤ ، ٨٠٥) .

٤٤٠ – عين بعد النقطة C عن المستقيم AB (الشكل ٦٣٦ ، ٦٣٧) .

٤٤١ – أوجد المسقط الناقص للنقطة A إذا كان بعد النقطة A عن المستقيم BC مساوياً 25 mm (الشكل ٨٠٦ ، ٨٠٧) .

٤٤٢ – عين البعد بين المستقيمين المتوازيين AB و CD (الشكل ٥٩٩ ، ٦٣٩) .

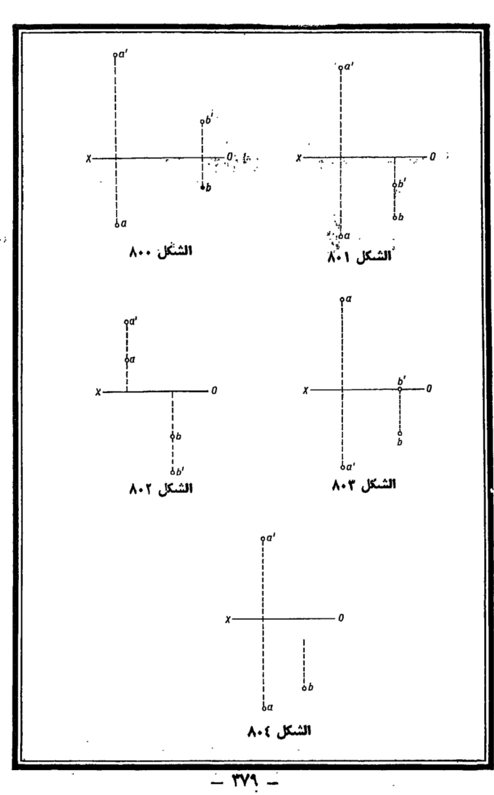
٤٤٣ – أوجد المسقط الناقص للمستقيم CD إذا كان البعد بين المستقيمين المتوازيين AB و CD مساوياً 25 mm (الشكل ٨٠٨ ، ٨٠٩) .

٤٤٤ – ارسم مسقطي المستقيم MN الموازي للمستقيمين AB و CD والذي يبعد عن المستقيم AB بمقدار 20 mm وعن المستقيم CD بمقدار 30mm (الشكل ٥٩٩ ، ٦٣٩) .

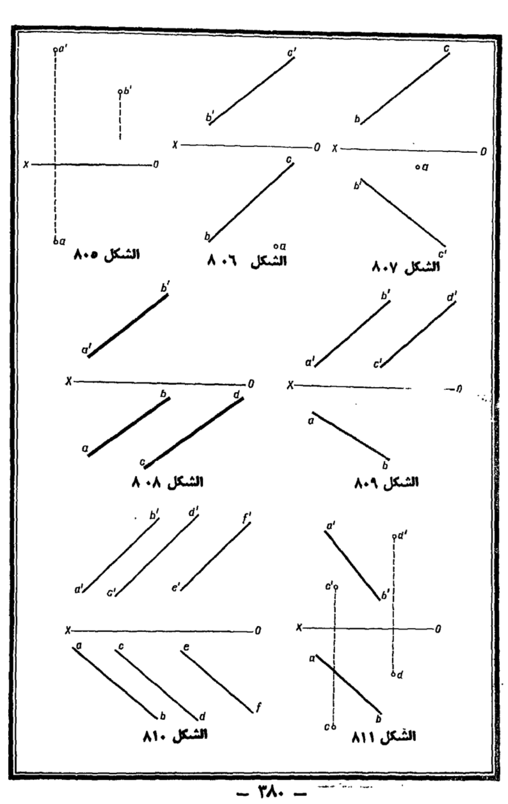
٤٤٥ – أوجد مسقطي المستقيم MN الموازي للمستقيم AB والذي يبعد عنه بمقدار 20 mm وعن النقطة C بمقدار 30 mm (الشكل ٦٣٦ ، ٦٣٧) .

٤٤٦ – أوجد مسقطي المستقيم MN الذي يوازي المستقيمات EF,CD,AB ويبعد عنها بمقدار واحد (الشكل ٨١٠) .

٤٤٧ – أوجد مسقطي المستقيم MN الموازي للمستقيم AB والذي يبعد بنفس المقدار



الشكل ٨٠٠
الشكل ٨٠١
الشكل ٨٠٢
الشكل ٨٠٣
الشكل ٨٠٤



الشكل ٨٠٥

الشكل ٨٠٦

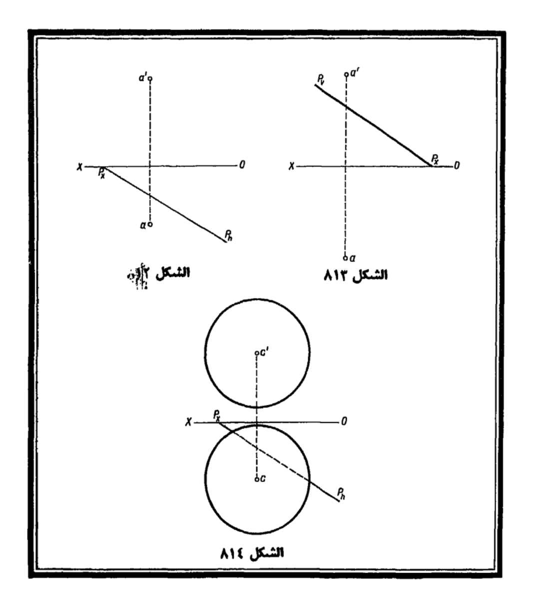
الشكل ٨٠٧

الشكل ٨٠٨

الشكل ٨٠٩

الشكل ٨١٠

الشكل ٨١١



الشكل ٨١٢

الشكل ٨١٣

الشكل ٨١٤

عن هذا المستقيم وعن النقطتين C و D (الشكل ٨١١) .

٤٤٨ — أوجد البعد بين المستقيمين المتخالفين AB و CD (الشكل ٥٦٠، ٥٧٨) .

٤٤٩ – أوجد على المستقيم AB نقطة تبعد عن المستقيم CD بمقدار 25 mm
(الشكل ٥٦٠ ، ٥٧٨) .

٤٥٠ – عيّن بعد النقطة K عن المستوي المعطى (الشكل ٦٤١ –٦٤٥) .

٤٥١ – ارسم من النقطة C كرة تمس المستوي المفروض (الشكل ٥٨٢ – ٥٨٧) .

٤٥٢ – أوجد المسقط الناقص للنقطة K التي تبعد عن المستوي المفروض بمقدار
25 mm (الشكل ٥٥٧ ، ٥٨٨ – ٥٩٠) .

٤٥٣ – أوجد الأثر الناقص للمستوي P إذا كان بعد النقطة A عن هذا المستوي
يساوي 20 mm (الشكل ٨١٢ ، ٨١٣) .

٤٥٤ – أوجد الأثر الناقص للمستوي P إذا كان مماساً لسطح الكرة (الشكل ٨١٤) .

٤٥٥ – عيّن البعد بين المستويين المتوازيين P و Q (الشكل ٥٧٧) .

٤٥٦ – ارسم المحل الهندسي لجميع نقاط الفراغ التي تبعد عن المستوي المفروض
بمقدار 25 mm (الشكل ٥٩٦ – ٦٠٠) .

٤٥٧ – عيّن على المستقيم MN نقطة تبعد عن المستوي المفروض 20 mm
(الشكل ٦٠٦ – ٦٠٨) .

البحث الواحد والعشرون

تعيين الزوايا

تتعين الزاوية بين مستقيمين متقاطعين بإحدى الطرق التالية :

١ – بتضمين الزاوية في مثلث : نقطع ضلعي الزاوية بمستقيم ما ونعين القيمة الحقيقية للمثلث الحاصل ومنه نعين القيمة الحقيقية للزاوية المعطاة.

٢ – بالدوران (أو الانتقال) : نوضّع مستوي الزاوية بحيث يصبح موازياً لأحد مستويات الإسقاط .

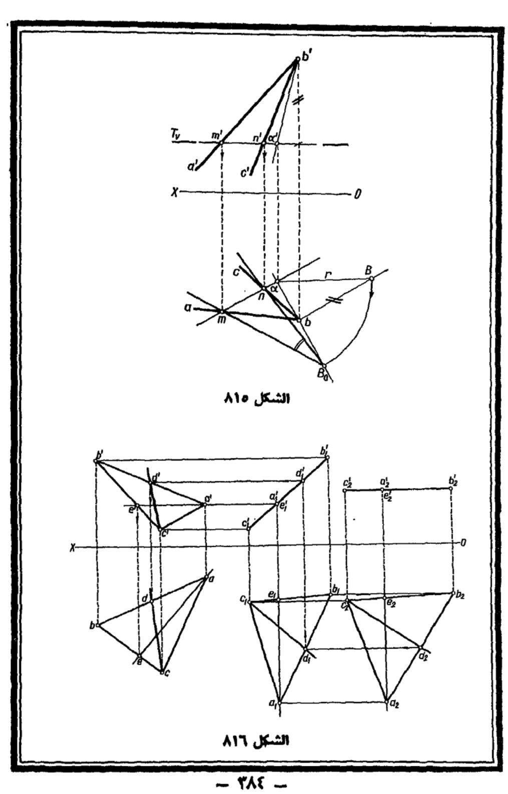
٣ – بالانطباق : نعين أحد آثار مستوي الزاوية – الأثر الأفقي أو الشاقولي – وبالدوران حول هذا الأثر نطبّق الزاوية مع مستوي الإسقاط الموافق .

٤ – بالدوران حول مستقيم أفقي أو جبهي : نطبّق الزاوية المفروضة مع المستوي R الموازي لمستوي الإسقاط الأفقي (الشاقولي) والمار من مستقيم أفقي (جبهي) ما من مستوي الزاوية .

٥ – بتبديل مستويات الإسقاط : نغيّر مستويات الإسقاط بحيث يصبح أحدها موازياً لمستوي الزاوية المعطاة .

ملاحظة . إن أبسط طرق الحل المذكورة هي الطريقة الرابعة التي توصلنا للغاية المنشودة بكل بساطه وسرعة .

للمستقيمات التي لا تقع في مستو واحد ، كمقياس للزاوية الكائنة بينهما تستخدم الزاوية بين مستقيمين متقاطعين وموازيين للمستقيمين المفروضين .



الشكل ٨١٥

الشكل ٨١٦

مسائل

● **المثال ٢٦٠** : عين القيمة الحقيقية للزاوية ABC (الشكل ٨١٥) .

الحل : طريقة الدوران حول مستقيم أفقي .

نمرر المستقيم الأفقي (mn,m′n′) في مستوي الزاوية ونضمن هذا المستقيم في المستوي T الموازي للمستوي الأفقي للإسقاط . نطبق جانبي الزاويـة (mb ، m′b′) و (nb,n′b′) مـع المستوي T . النقـاط (m,m′) و(n,n′) تقع في المستوي T يبقى أن نطبق على هـــذا المستوي رأس الزاوية (b,b′) . الزاوية $m B_o n$ هي الزاوية المطلوبة . الإنشاء واضح من الرسم .

● **المثال ٢٦١** : انشىء منصف الزاوية C للمثلث ABC (الشكل ٨١٦) .

الحل : طريقة النقل .

لتنصيف الزاوية علينا تعيين قيمتها الحقيقية ولهذا علينا أن نوضّع مستوي المثلث بحيث يصبح موازياً لأحد مستويات الإسقاط مثلاً المستوي الأفقي .

نمرر من النقطة (a,a′) مستقيماً أفقيـاً في مستوي المثلث وننقله بصورة موازية لمستوي الإسقاط الأفقي حتى يصبح عمودياً على مستوي الإسقاط الشاقولي . عنـد نقل المثلث بصورة موازية لمستوي الاسقاط الأفقي فإن مسقطه الأفقي كما نعلم لايتغير لذا نوضّع المسقط الأفقي للمثلث في الوضعية $a_1b_1c_1$ بحيث يكون المسقط الأفقي للمستقيم الأفقي عمودياً على خط الأرض . من $a_1b_1c_1$ نجـد المسقط الشاقولي ($a'_1b'_1c_1'$) للمثلث الذي هو بشكل مستقيم . بعدها ننقل المثلث ($a_1b_1c_1,a_1'b_1'c_1'$) بصورة موازيـة لمستوي الإسقاط الشاقولي بحيث يصبح المسقط الشاقولي ($a'_2b'_2c'_2$) للمثلث

حوازياً لخط الأرض . من $a'_2b'_2c'_2$ نعين $a_2b_2c_2$. ننشىء المنصف للزاوية (c_2,c'_2) ونعين مساقطه $(cd، c'd')$ بإنشاء عكسي (الإنشاء واضح من الرسم) .

تسمى الزاوية الحادة المحصورة بين مستقيم ما ومسقطه على مستوٍ مفروض بالزاوية بين المستقيم والمستوي .

لتعيين هذه الزاوية بالطريقة المباشرة تلزمنا بعض الإنشاءات الإضافية (ماهي ؟) مما يجعل هذه الطريقة طويلة . إلا أنه يمكننا أن نبسطها كثيراً بتعيين الزاوية المتممة لها أي الزاوية الحادة φ المحصورة بين المستقيم والعمود المنزل من نقطة ما من ذلك المستقيم على ذلك المستوي . تعيين هذه الزاوية يمكن أن يتم بإحدى الطرق المبينة أعلاه إلا أنه كما سبق ونوهنا من الأسهل والأبسط استخدام طريقة الدوران حول المستقيم الأفقي أو الجبهي .

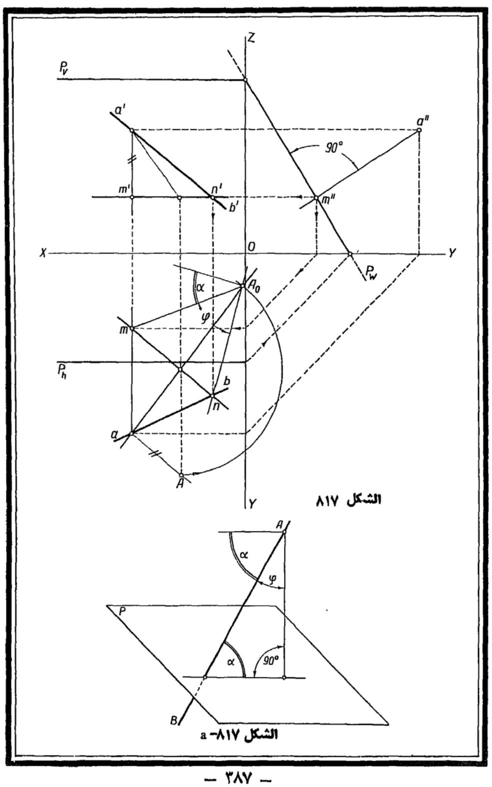
في الحالة عندما يتبين أن الزاوية منفرجة فإنه للحصول على الزاوية المطلوبة α علينا أن نطرح من الزاوية φ زاوية قدرها $90°$ (الشكل ٨١٧ a) .

● **المثال ٢٦٢ :** عين الزاوية بين المستقيم AB والمستوي P (الشكل ٨١٧) .

الحل : ننزل من النقطة (a ، a') عموداً على المستوي P . بما أن المستوي P عمودي على المستوي الجنبي لذا ننشىء الأثر الجنبي (P_w) للمستوي والمسقط الجنبي (a'') للنقطة . نمرر من النقطة a'' المستقيم $a''m''$ العمودي على الأثر P_w ومنه نعين المسقط الأفقي (am) والشاقولي (a'm') لهذا العمود . بعدها بالدوران حول المستقيم الأفقي (mn،m'n') نعين القيمة الحقيقية للزاوية mA_0n وبالتالي قيمة الزاوية α كالزاوية المتممة لها .

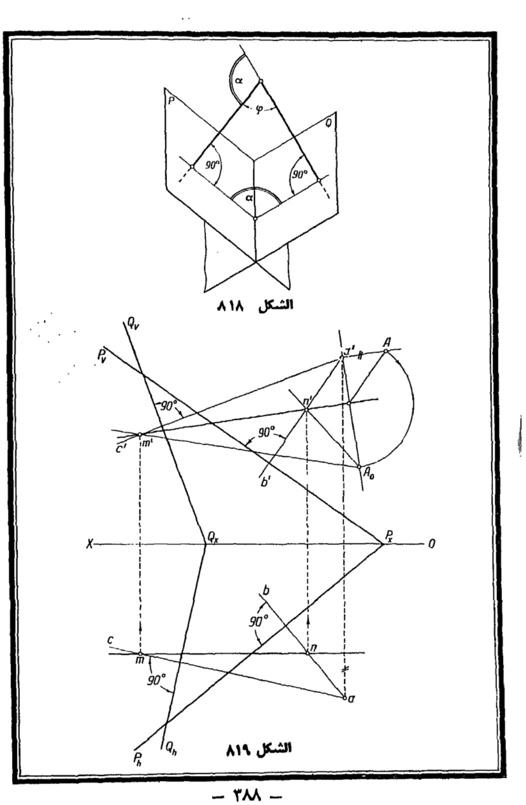
ملاحظة : . بصورة مماثلة تماماً تتعين الزاوية بين المستقيم والمستوي عندما لا يُعطى المستوي بآثاره .

تقـــاس الزاوية بين مستويين متقاطعين بأصغر زاوية خطيـة ($\alpha°$)



الشكل ٨١٧

الشكل ٨١٧- a



الشكل ٨١٨

الشكل ٨١٩

تعيين هذه الزاوية يتطلب مجموعة من الإنشاءات الإضافية (ما هي ؟) لذا فإن طريقة الحل المباشر طويلة للغاية . إلا أنه يمكننا تبسيط المسألة بتعيين الزاوية φ المحصورة بين العمودين المنزلين من نقطة إختيارية ما على المستويين المفروضين . إن هذه الزاوية φ هي الزاوية المطلوبة إذا كانت حادة أما إذا كانت φ منفرجة فإن الزاوية المطلوبة هي الزاوية المكملة لها (الشكل ٨١٨) .

في حالة تعيين الزاوية بين مستويين متقاطعين ذا جوانب موجهة (مثلاً بين وجوه كثير الوجوه) علينا أن ننشىء أعمدة على تلك المستويات المفروضة من نقطة اختيارية مأخوذة داخل كثير الوجوه . الزاوية المطلوبة هي الزاوية المكملة للزاوية المعينة φ . يمكن أن تتعين الزاوية بين مستويين بالطرق الإضافية التالية :

١ ـ بالدوران أو بالانتقال : علينا أن نوضع المستويين المعطيين (أي خط تقاطعهما) في وضعية عمودية على أحد مستويات الإسقاط (انظر المثال ٢١٠) .

٢ ـ بتبديل مستويات الإسقاط : علينا تغيير مستويات الإسقاط بحيث يصبح أحدها عمودياً على المستويين المفروضين أي على خط تقاطعهما (انظر المثال ٢٤٩) .

● **المثال ٢٦٣ :** عين الزاوية بين المستويين P و Q (الشكل ٨١٩) .

الحل : ننشىء من نقطة اختيارية (a،a′) العمودين (ab،a′b′) و(ac،a′c′) على المستويين PوQ وبالدوران حول المستقيم الجبهي (mn ، m′n′) نعين القيمة الحقيقية للزاوية (bac،b′a′c′) . الزاوية المطلوبة تساوي الزاوية α .

● **المثال ٢٦٤ :** عين الزاوية عند الحرف SA للهرم SABCD (الشكل ٨٢٠) .

الحل : طريقة الانتقال .

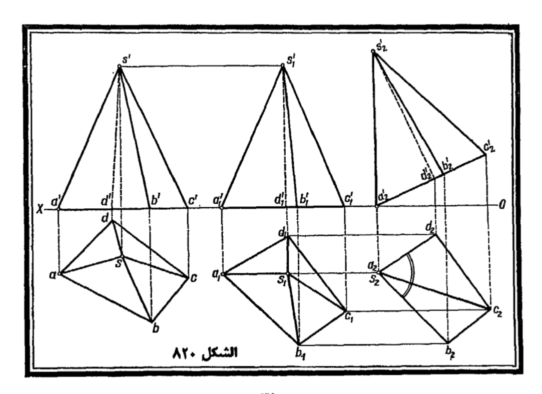
ننقل الهرم بصورة موازيـة لمستوي الإسقاط الأفقي ونوضّعه بحيث يصبح الحرف SA موازياً لمستوي الإسقاط الشاقولي بعدها ننقله بصورة موازية لمستوي الإسقاط الشاقولي ونوضعه بحيث يصبح الحرف SA عمودياً على مستوي الإسقاط الأفقي . الزاوية $b_2a_2d_2$ هي الزاوية المنشودة . الإنشاء واضح من الرسم .

مسائـــل

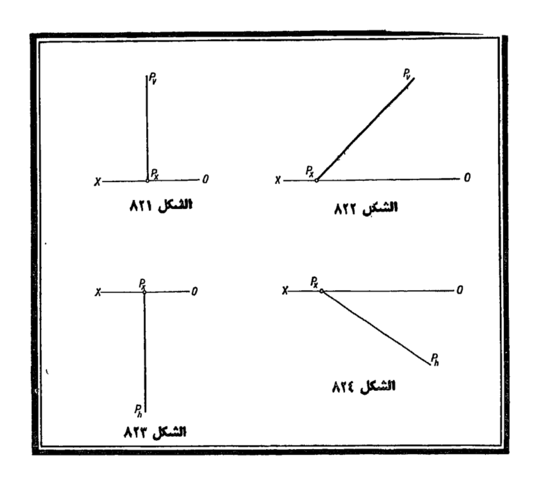
٤٥٨ – عين الزاوية بين المستقيمين المتقاطعين AB وAC (الشكل ١٦٤ ، ١٦٥) .

٤٥٩ – عين الزاوية بين المستقيمين المتخالفين CD و AB (الشكل ٥٦٠ ، ٥٧٨)

٤٦٠ – عين الزاوية بين المستقيم AB والمستوي المفروض (الشكل ٤٥١ – ٤٥٨ ، ٤٧٠ – ٤٧٣) .



الشكل ٨٢٠



الشكل ٨٢١ الشكل ٨٢٢ الشكل ٨٢٣ الشكل ٨٢٤

٤٦١ — عين زوايا ميل المستوي المفروض على مستويات الإسقاط (الشكل ٥٩٦—٦٠٠).

٤٦٢ — عين الأثر الآخر للمستوي P إذا كانت الزاوية المشكلة بين هذا المستوي ومستوي الإسقاط الشاقولي تساوي 60° (الشكل ٨٢١ ، ٨٢٢).

٤٦٣ — عين الأثر الآخر للمستوي P إذا كانت الزاوية المشكلة بين هذا المستوي ومستوي الإسقاط الأفقي تساوي 45° (الشكل ٨٢٣ ، ٨٢٤).

٤٦٤ ــ ارسم من النقطة A (20 , 30) مستوياً اختيارياً P يميل على مستوي الإسقاط الأفقي (الشاقولي) بزاوية قدرها 45° .

٤٦٥ ــ عين الزاوية بين وجهي الهرم عند الحرف SA (SB،SC،SD) وكذلك زاوية ميل الوجه SAB (SBC،SCD،SAD) على القاعدة (الشكل ٨٢٠)

٤٦٦ ــ عين الزاوية بين المستويات المفروضة (الشكل ٣٩٣ ، ٣٩٤ ، ٣٩٨ ــ ــ ٤٠١ ، ٤٠٨ ، ٤٠٩ ، ٤٧٤ ، ٦٠١ ــ ٦٠٣) .

البحث الثاني والعشرون

تقاطع كثيرات الوجوه مــــع مستوي

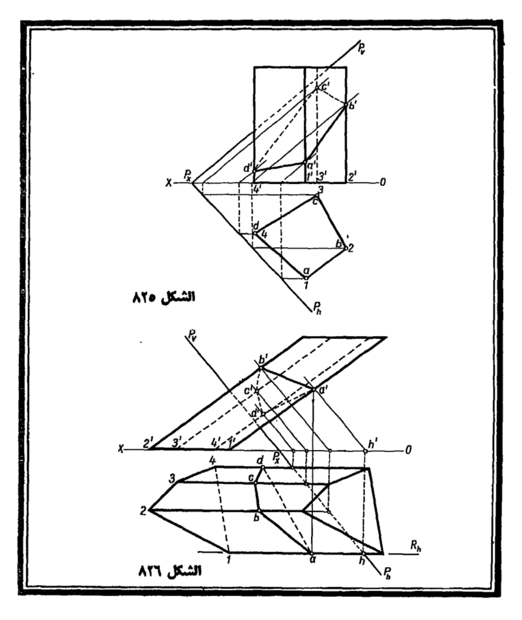
انفرادات كثيرات الوجوه

انفراد كثير الوجوه هو الشكل المستوي الحاصل بالتطبيق المتتابع لجميع وجوه كثير الوجوه على مستوي الرسم . مساحة الشكل الناتج تساوي مساحة سطح كثير الوجوه المفرود .

أمثلــة

● **المثال ٢٦٥ :** أوجد خط تقاطع سطح الموشور مع المستوي P (الشكل ٨٢٥) .

الحل : لإنشاء خط التقاطع علينا إيجاد نقاط تقاطع أحرف الموشور مع المستوي المفروض . نعين النقطة (a، a′) تقاطع الحرف (1,1′) مع المستوي . المسقط الأفقي



الشكل ٨٢٥

الشكل ٨٢٦

(a) لهذه النقطة ينطبق على المسقط الأفقي للحرف وبمعرفته نعين المسقط الشاقولي (a′) للنقطة أذ أن النقطة (a , a′) تقع أيضاً في المستوي P . بصورة مماثلة نجد النقاط

(d,d′) ، (c,c′) (b,b′) لتقاطع بقية الأحرف مع المستوي P . بوصل هذه النقاط على ... ب مساقط خط التقاطع المطلوب : المسقط الأفقي (abcd) والمسقط الشاقولي (a′b′c′d′) .

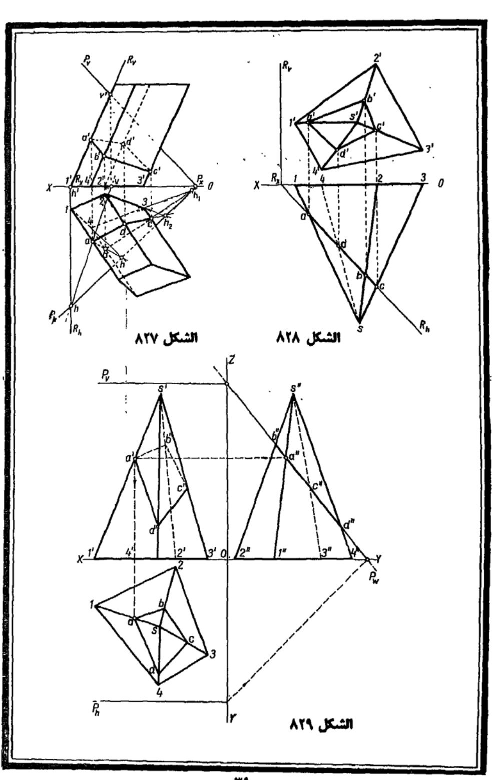
من الرسم واضح أن المسقط الأفقي (abcd) لخط التقاطع ينطبق مع المسقط الأفقي (1,2,3,4) للموشور .

● المثال ٢٦٦ : أوجد خط تقاطع سطح الموشور مع المستوي P (الشكل ٨٢٦) .

الحل : علينا أن نجد نقاط تقاطع احرف الموشور مع المستوي P . نعين النقطة (a ، a′) لتقاطع الحرف (1,1′) مع المستوي . نضمن الحرف في المستوي R الموازي لمستوي الاسقاط الشاقولي فيقطع المستوي P وفق مستقيم جبهي . نقطة تقاطع المساقط الشاقولية للحرف والمستقيم الجبهي هي المسقط الشاقولي (a′) للنقطة وبرسم نجد المسقط الأفقي (a) للنقطة على المسقط الأفقي للحرف. بصورة مماثلة نجد نقاط (d,d′) ، (c,c′) و (b,b′) لتقاطع بقية الأحرف مع المستوي . بوصل النقاط الحاصلة على التتابع نجد المساقط المنشودة : المسقط الأفقي (abcd) والمسقط الشاقولي (a′b′c′d′) .

● **المثال ٢٦٧** : أوجد خط تقاطع سطح الموشور مع المستوي P (الشكل ٨٢٧).

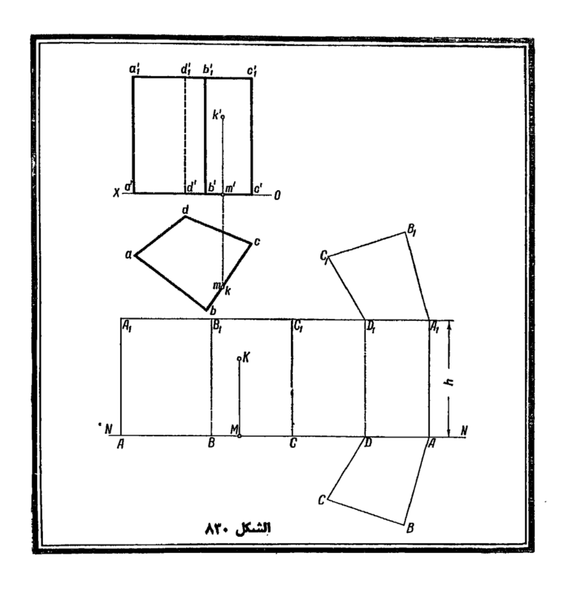
الحل : بما أن أحرف الموشور والمستوي ذات وضعية عامة فإن إيجاد نقاط تقاطع جميع الحروف الجانبية مع المستوي بالطريقة العادية معقد وطويل (لماذا ؟) لذا لتبسيط الإنشاء علينا أن نأخذ بعين الإعتبار مايلي : الموشور يستند بقاعدته على المستوي الأفقي للاسقاط والمسقط الأفقي لكل ضلع من قاعدة الموشور هو



الشكل ٨٢٧

الشكل ٨٢٨

الشكل ٨٢٩



الشكل ٨٣٠

الأثر الأفقي للوجه الجانبي الموافق للموشور أما نقطة تقاطع كل من هذه الأضلع مع الأثر الأفقي (P_h) فهي نقطة من المسقط الأفقي لخط التقاطع . من هـذا بطريقة اعتيادية نجد مثلاً النقطة (a ، a') لتقاطع الحرف (1,1') مع المستوي

ثم نمدد المستقيم 1, 4 حتى يتقاطع مع الأثر P_h في النقطة h . بوصل النقطة a بـ h بالمستقيم ah فإن تقاطعه مع المسقط الأفقي للحرف (4,4′) يعين المسقط الأفقي (b) لنقطة تقاطع الحرف (4,4′) مع المستوي ومنه نجد المسقط الشاقولي (b′) للنقطة . بطريقة مماثلة نمدد المستقيم 4,3 حتى تقاطعه مع الأثر P_h في النقطة h_1 ، بوصل النقطتين b وh_1 بالمستقيم bh_1 فإن نقطة تقاطعه مع المسقط الأفقي للحرف (3,3′) تعين لنا المسقط الأفقي (c) لنقطة تقاطع الحرف (3,3′) مع المستوي ومنه نجد المسقط الشاقولي (c′) لهذه النقطة . أخيراً نمدد المستقيم 2,3 حتى تقاطعه مع الأثر P_h في النقطة h_2 . بوصل النقطتين c وh_2 بالمستقيم ch_2 فإن نقطة تقاطعه مع المسقط الأفقي للحرف (2,2′) تعين لنا المسقط الأفقي (d) لنقطة تقاطع الحرف (2,2′) مع المستوي . ومن هذا المسقط نعين المسقط الشاقولي (d′) لهذه النقطة . بوصل النقاط الحاصلة على التتابع نجد مساقط خط التقاطع المنشود : المسقط الأفقي (abcd) والمسقط الشاقولي (a′b′c′d′).

● **المثال ٢٦٨ :** أوجد خط تقاطع سطح الهرم مع المستوي R (الشكل ٨٢٨) .

الحل : نعين نقاط تقاطع الأحرف الجانبية للهرم مع المستوي الشاقولي R . بوصل هذه النقاط على التتابع نجد مساقط الخط المنشود : المسقط الأفقي (abcd) والمسقط الشاقولي (a′b′c′d′) . من الرسم واضح أن المسقط الأفقي (abcd) لخط التقاطع ينطبق مع الأثر R_h (لماذا ؟) .

● **المثال ٢٦٩ :** أوجد خط تقاطع سطح الهرم مع المستوي P (الشكل ٨٢٩) .

الحل : نعين نقاط تقاطع الأحرف الجانبية للهرم مع المستوي الموازي لخط الأرض . ننشىء المسقط الجنبي للهرم والأثر الجنبي (P_w) للمستوي .نقاط تقاطع المساقط

الجنبية لأحرف الهرم مع الأثر P_w تعين لنا المساقط الجنبية لنقاط تقاطع الأحرف مع المستوي . من هذه المساقط نجد المساقط الأفقية والشاقولية لهذه النقاط . بوصل هذه النقاط على التتابع نجد مساقط خط التقاطع المنشود : المسقط الأفقي (abcb) والمسقط الشاقولي (a'b'c'd') . إن حل هذه المسألة دون اللجوء للمستوي الجنبي يسبب تعقيد الإنشاء (لماذا ؟) .

● **المثال ٢٧٠ :** أرسم انفراد سطح الموشور الرباعي (الشكل ٨٣٠) .

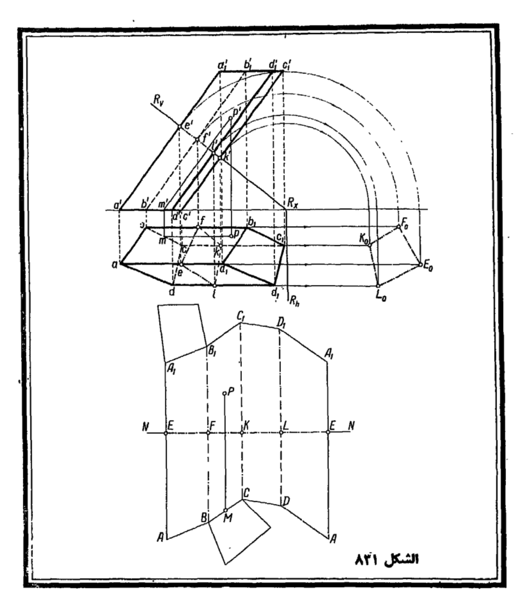
الحل : إن السطح الكلي للموشور المفروض يتألف من أربعـــة مستطيلات ومضلعين . نرسم مستقيماً اختيارياً NN وعليه اعتباراً من النقطة A نأخذ الأطوال AC,BC,CD,DA المساوية لأضلاع قاعدة الموشور أي .... $AB = ab$, $BC = bc$.

من النقاط A,B,C , D,A ننشىء أعمدة على المستقيم NN وعليها نأخذ قطعاً متساوية بطول h . بوصل نهايات الأعمدة نحصل على المستقيم $A_1B_1C_1D_1A_1$ الموازي للمستقيم ABCDA . بعدها ننشىء على الجانب AD قاعدة الموشورالسفلية أما على الجانب A_1D_1 فننشىء قاعدته العلوية . إن الشكل الحاصل هو الانفراد الكلي لسطح الموشور .

نبين كذلك كيف يمكن نقل نقطة ما (k,k') معطاة على وجه الموشور BB_1CC_1 وإيجادها على الانفراد . نأخذ على الضلع BC الطول BM المساوي لـ bm . من النقطة m ننشىء عموداً نأخذ عليه القطعة MK المساوية لـ m'k' .

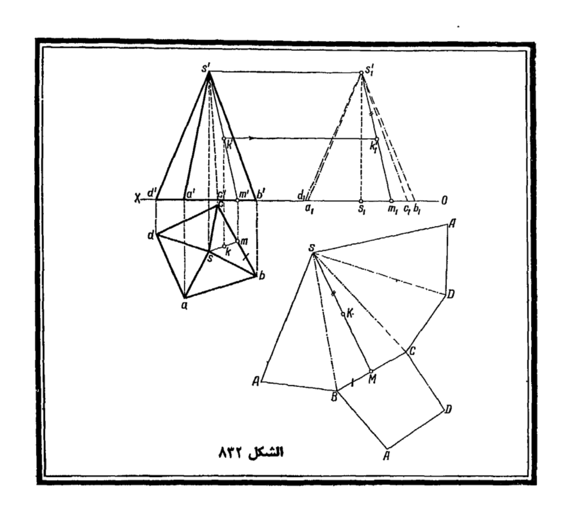
● **المثال ٢٧١ :** ارسم انفراد سطح موشور رباعي مائل (الشكل ٨٣١) .

الحل : بما أن الوجوه الجانبية للموشور المائل هي متوازية الأضلاع فانه لإنشائها بالقيمة الحقيقية علينا تعين الزاوية بين أضلاع كل من هذه المتوازيات الأضلاع وكذلك طول أحد أقطاره . إلا أنه يمكننا الاستغناء عن هذا باستخدام المستوي المساعد R



الشكل ٨٣١

العمودي على الأحرف الجانبية الذي يقطع الموشور المائل إلى موشورين قائمين مقطوعين ذا قاعدة مشتركة في مستوي المقطع العمودي. بتعيين مسقط هذا المقطع (المسمى بالناظمي) وبتعيين قيمته الحقيقية بطريقة الانطباق يمكننا البدء بفرد سطح



الشكل ٨٣٢

الموشور المائل الذي يتألف من سطوح موشورين قائمين متوضعين في الجهتين المختلفتين من المقطع العمودي .

نرسم مستقيماً اختيارياً NN وعليه من النقطة E نأخذ القطع EF,FK,KL,LE المساوية لأضلاع المقطع الناظمي للموشور المائل أي $FK = F_0K_0$, $EF = E_0 F_0$. من النقاط E،F،K,L،E ننشيء أعمدة على المستقيم NN وعليها نأخذ أطوال الأحرف

الجانبية للموشورين العلوي والسفلي . بوصل نهايات الأعمدة نحصل على الخطوط المنكسرة ABCDA و $A_1B_1C_1D_1A_1$ ذات الأضلاع المتوازية أي .... $AB//A_1B_1, BC//B_1C_1$

بعدها ننشىء على ضلع ما القاعدتين العلوية والسفلية للموشور بقيمها الحقيقية .

نبين أيضاً كيف يمكن نقل نقطة ما (p , p′)معطاة على الوجه CB_1CC_1 للموشور المائل وإيجادها على الإنفراد . نأخذ على الضلع BC القطعة $BM = bm$. من النقطة M ننشىء مستقيماً موازياً للحرف ونأخذ عليه القطعة $MP = m'p'$.

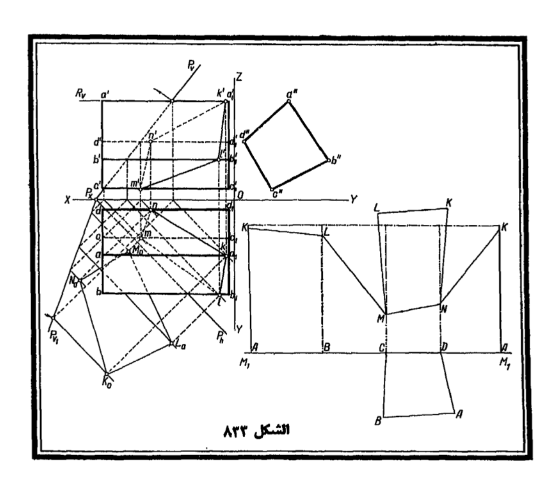
ملاحظة : إذا كانت الأحرف الجانبية للموشور المائل لاتوازي مستوي الإسقاط فإننا باستخدام الانتقال نوضعها بحيث تصبح موازية لأحد مستويات الإسقاط .

● **المثال ٢٧٢ :** ارسم انفراد الهرم الرباعي (الشكل ٨٣٢) .

الحل : حتى نتمكن من رسم وجوه الهرم بقيمها الحقيقية علينا تعيين القيم الحقيقية لأحرفه الجانبية . نأخذ على خط الأرض من نقطة ما s_1 القطع $s_1a_1, s_1b_1, s_1c_1, s_1d_1$ المساوية لأطوال المساقط الأفقية للأحرف الجانبية . بوصل النقاط a_1, b_1, c_1, d_1 بالنقطة s'_1 نجد الأطوال الحقيقية لهذه الأحرف . نأخذ نقطة ما S وننشىء على التوالي الأوجه : SAB, SBC, SCD, SAD بمعرفة الأضلاع الثلاثة لكل وجه بعدها نرسم قاعدة الهرم على أحد الأضلاع مثلاً BC . إن الشكل الحاصل هو الانفراد الكلي لسطح الهرم . نبين كذلك كيف يمكن نقل نقطة ما (k,k′) معطاة على الوجه (sbc,s′b′c′) من الهرم وإيجاد هذه النقطة على الانفراد . نأخذ على الضلع BC القطعة $BM = bm$ ثم نصل النقطة S بالنقطة M بالمستقيم SM حيث نأخذ عليه القطعة $SK = s'_1k'_1$.

● **المثال ٢٧٣ :** اقطع الموشور بالمستوي P وارسم انفراد أحد جزئيه (الشكل٨٣٣) .

الحل : نعين نقاط تقاطع أحرف الموشور مع المستوي P . مثلًا لتعيين النقطة (k,k′) لتقاطع الحرف (aa_1 , $a'a'_1$) مع المستوي نمرر من هذا الحرف مستوياً R موازياً لمستوي الإسقاط الأفقي فيقطع المستوي P وفق مستقيم أفقي . مكان تقاطع المساقط الأفقية للحروف والمستقيم الأفقي نجد المسقط الأفقي (k) للنقطة وبمعرفته نعين المسقط الشاقولي (k′) لهذه النقطة على المسقط الشاقولي للحرف . بصورة مماثلة



الشكل ٨٣٣

نعين النقاط (n,n') ، (m,m') ، (l,l') لتقاطع بقية الأحرف مع المستوي . بوصل هذه النقاط على التسلسل نحصل على مساقط خط التقاطع .

كذلك نجد بتطبيق المستوي P مع مستوي الإسقاط الأفقي القيمة الحقيقية للمقطع $K_oL_oM_oN_o$.

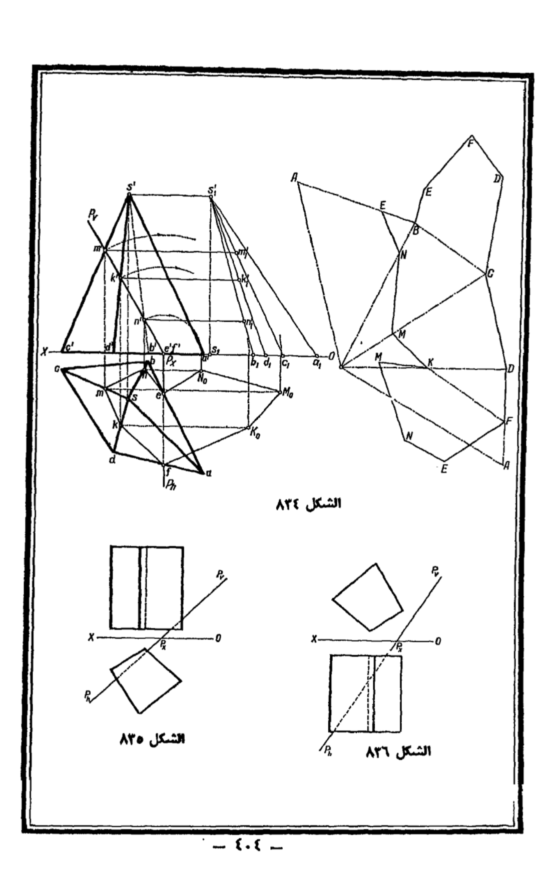
قبل البدء بانشاء انفراد الموشور المقطوع نعين القيمة الحقيقية للقاعدة ABCD المتوضعة موازية للمستوي الجنبي للإسقاط . لهذا نوجد مسقطها الجنبي $(a''b''c''d'')$.

ننشىء مستقيماً اختيارياً M_1M_1 وعليه من النقطة A نأخذ القطع AB,BC,CD,DA المساوية لأضلاع قاعدة الموشور أي ... $AB = a''b'', BC = b''c''$. من النقاط A,B,C,D,A ننشىء أعمـــدة على المستقيم M_1M_1 وعليها نأخذ الأطوال المناسبة للأحرف الجانبية أي $AK = a'k', BL = b'l'$... . بوصل نهايات الأعمدة نجد الخط المنكسر KLMNK . على الضلع MN نرسم القاعدة KLMN وعلى الضلع CD القاعدة ABCD .

● **المثال ٢٧٤ :** اقطع الهرم بالمستوي P وارسم انفراد أحد جزئيه (الشكل ٨٣٤) .

الحل : نعين نقاط تقاطع أحرف الهرم مع المستوي P . بما أن المستوي القاطع أمامي فإن تقاطع المساقط الشاقولية $(s'b',s'c',s'd')$ للأحرف مع الأثر الشاقولي (P_v) للمستوي يعين المساقط الشاقولية (k',m',n') لنقاط التقاطع وبمعرفتها نعين المساقط الأفقية (k,m,n) لهذه النقاط . الحرف $(sa,s'a')$ لا يتقاطع مع المستوي القاطع . قاعدة الهرم تتقاطع مع المستوي القاطع وفق المستقيم $(ef,e'f')$. نعين القيم الحقيقية لجميع الأحرف الجانبية للهرم بالانتقال ولشكل المقطع بالانطباق .

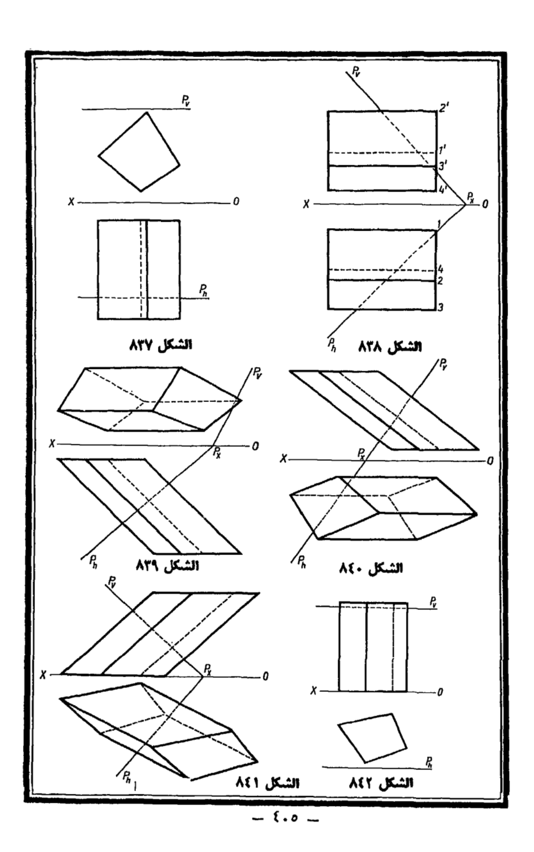
لـكي نحصل على انفراد السطح الجانبي للهرم المقطوع ننشىء انفراد السطح



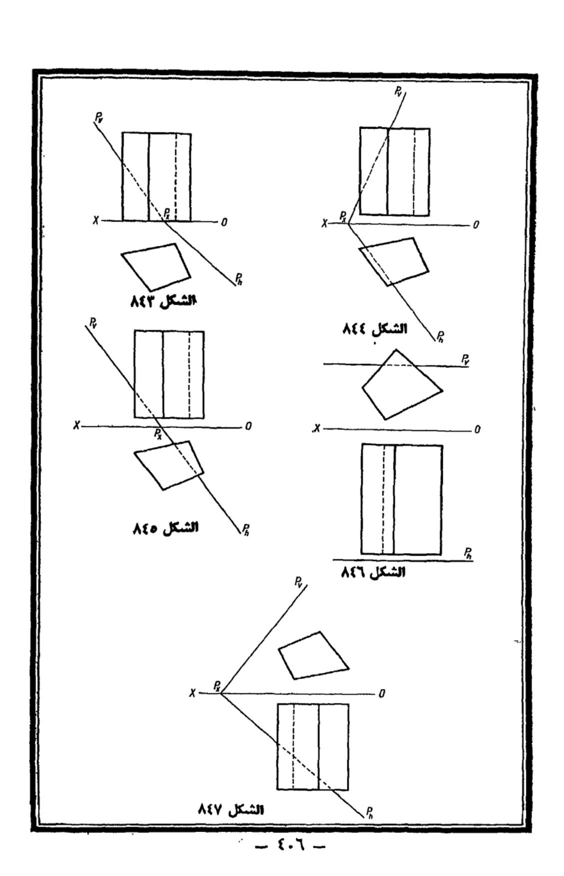
الشكل ٨٣٤

الشكل ٨٣٥

الشكل ٨٣٦



Pv
X
0
Ph
الشكل ٨٣٧
Pv
2'
1'
3'
4'
Px
X
0
1
4
2
3
Ph
الشكل ٨٣٨
Pv
X
0
Px
Ph
الشكل ٨٣٩
Pv
X
Px
0
Ph
الشكل ٨٤٠
Pv
X
Px
0
Ph
الشكل ٨٤١
Pv
X
0
Ph
الشكل ٨٤٢



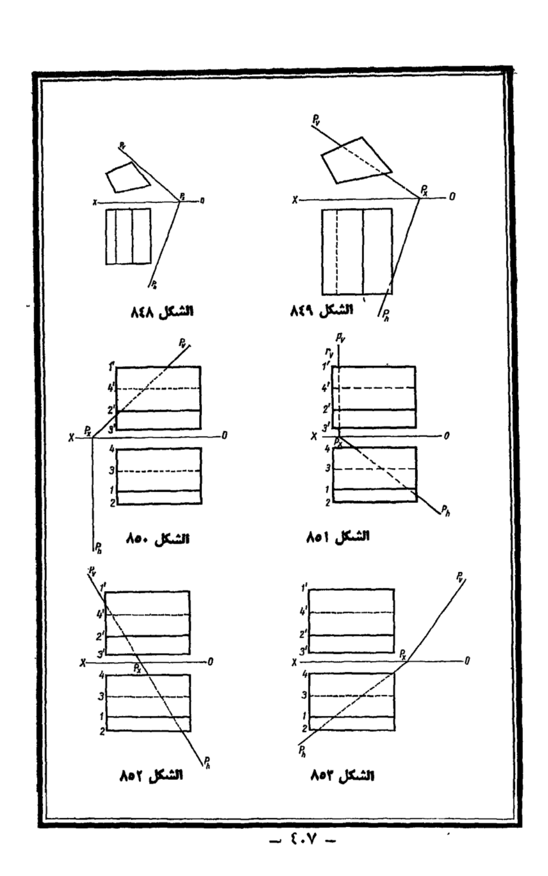
الشكل ٨٤٣

الشكل ٨٤٤

الشكل ٨٤٥

الشكل ٨٤٦

الشكل ٨٤٧



الشكل ٨٤٨

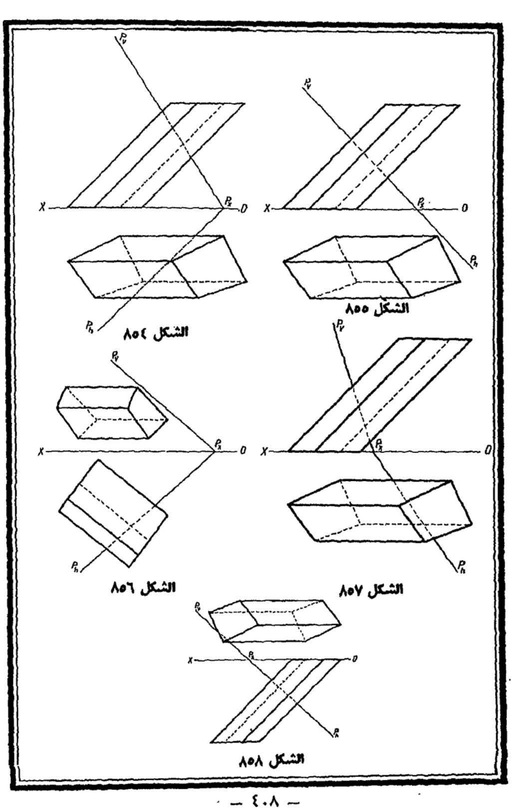
الشكل ٨٤٩

الشكل ٨٥٠

الشكل ٨٥١

الشكل ٨٥٢

الشكل ٨٥٣



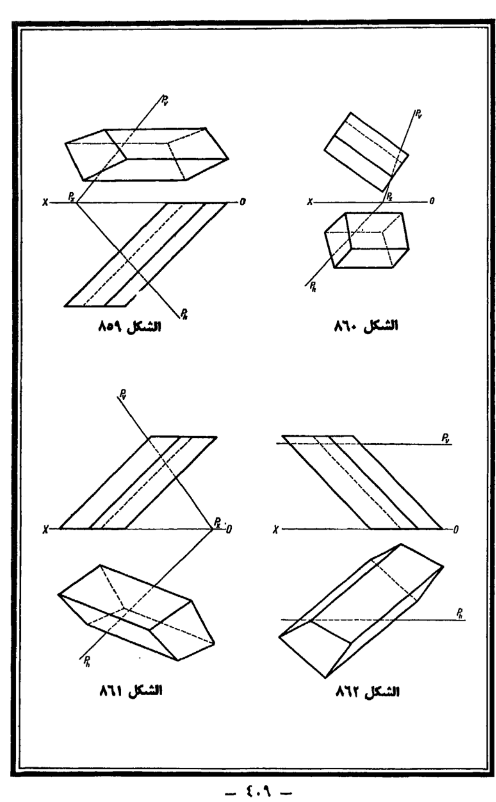
الشكل ٨٥٤

الشكل ٨٥٥

الشكل ٨٥٦

الشكل ٨٥٧

الشكل ٨٥٨

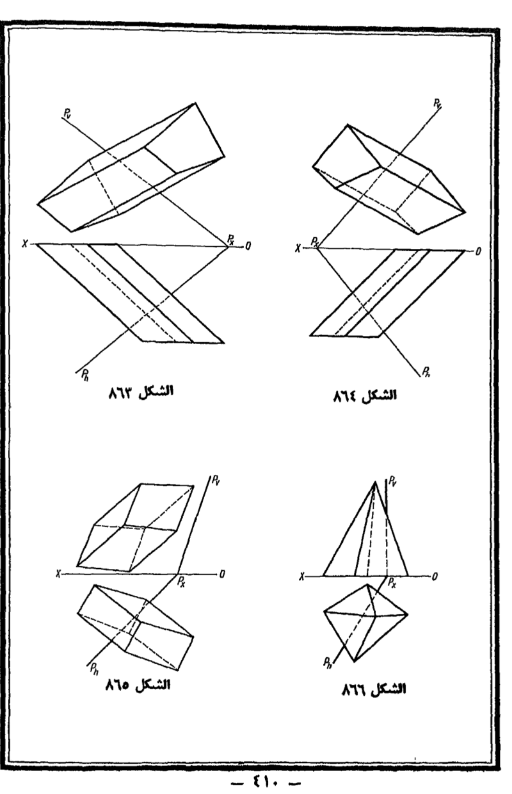


الشكل ٨٥٩

الشكل ٨٦٠

الشكل ٨٦١

الشكل ٨٦٢

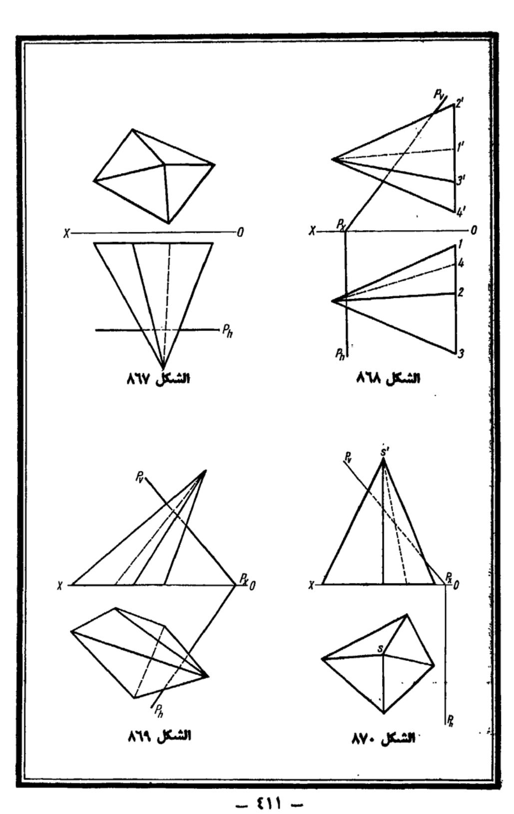


الشكل ٨٦٣

الشكل ٨٦٤

الشكل ٨٦٥

الشكل ٨٦٦

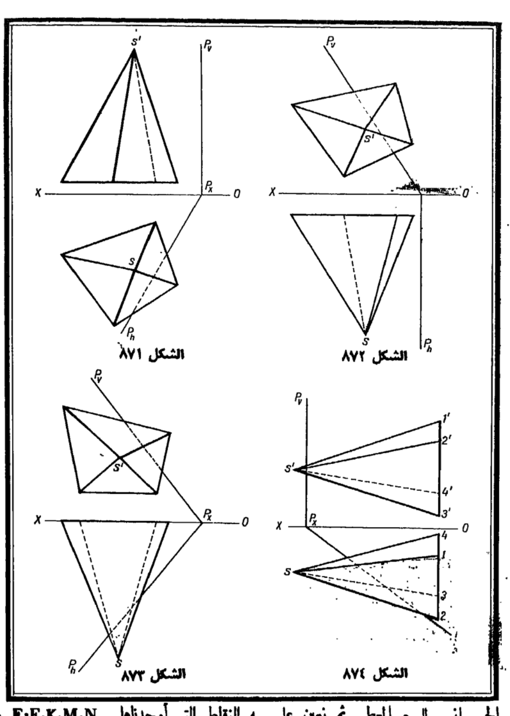


الشكل ٨٦٧

الشكل ٨٦٨

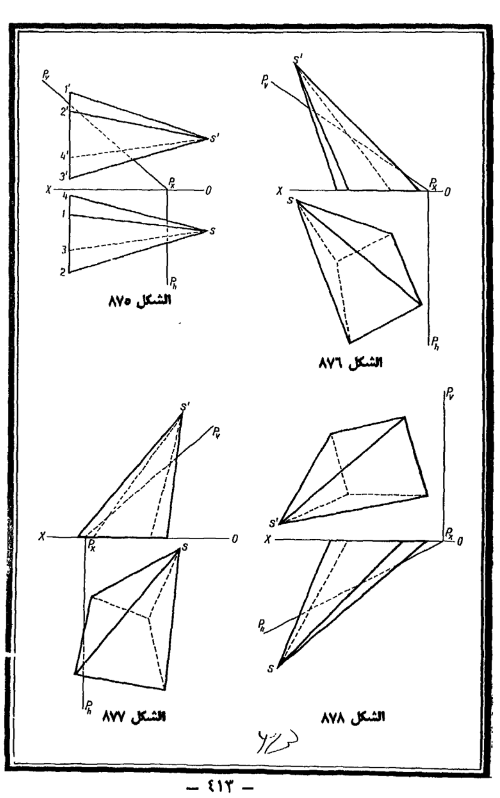
الشكل ٨٦٩

الشكل ٨٧٠

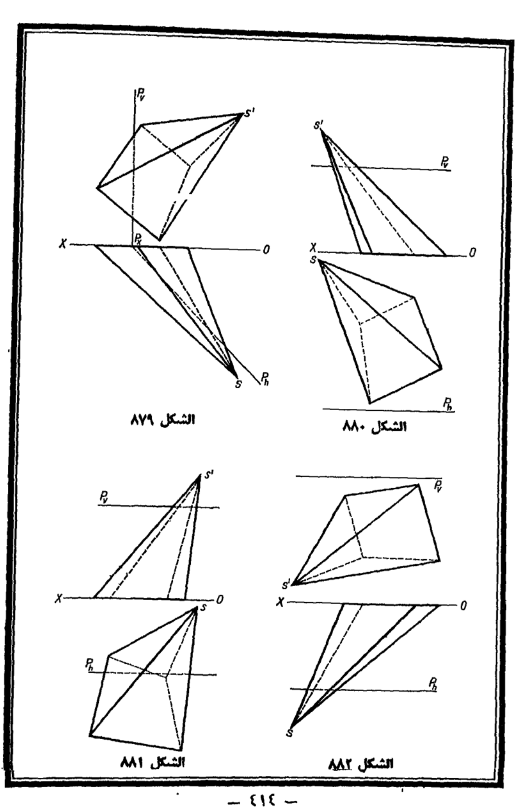


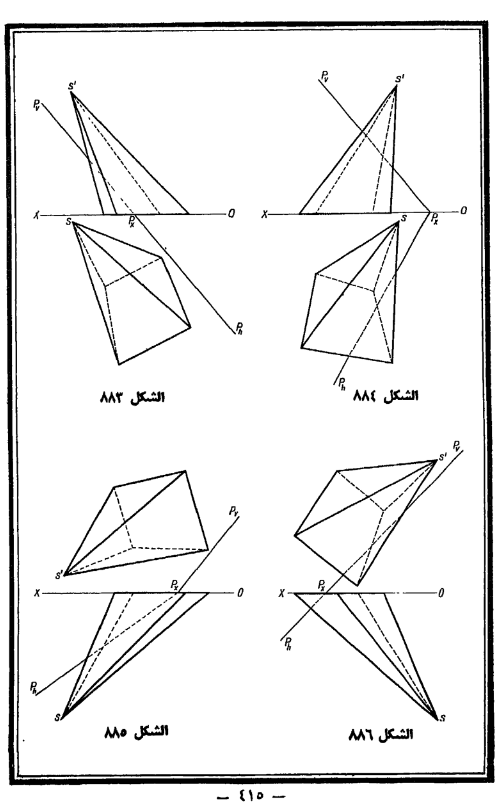
الشكل ٨٧١ الشكل ٨٧٢ الشكل ٨٧٣ الشكل ٨٧٤

الجـــانبي للهرم المعطى ثم نعين عليـــه النقاط التي أوجدناها E،F،K،M،N .
نعـــين القيم الحقيقيـــة للقطع (sk,s'k') , (sm,s'm') , (sn،s'n') ونـأخذهـا
على المستقيمات SA،SC،SD . بعـدهـا نــأخـذ BE=be على الضلـــع



P_v
1'
2'
s'
4'
3'
P_x
X
0
4
1
s
3
2
P_h
الشكل ٨٧٥
s'
P_v
X
P_x
0
s
P_h
الشكل ٨٧٦
s'
P_v
X
P_x
0
s
P_h
الشكل ٨٧٧
P_v
s'
X
P_x
0
P_h
s
الشكل ٨٧٨


Pv
s'
X
Px
0
s
Ph
الشكل ٨٧٩
s'
Pv
X
0
s
Ph
الشكل ٨٨٠
s'
Pv
X
0
s
Ph
الشكل ٨٨١
Pv
s'
X
0
Ph
s
الشكل ٨٨٢



الشكل ٨٨٣

الشكل ٨٨٤

الشكل ٨٨٥

الشكل ٨٨٦

AB و df = DF على الضلع DA . نرسم القاعدة العلوية والسفلية للهرم المقطوع على حرف ما .
الشكل الناتج هو الانفراد الكلي لسطح الهرم المقطوع .

ملاحظة : إذا كان المستوي القاطع ذو وضعية عامة فإنه ينصح لتعيين مساقط المقطع استخدام الدوران (الانتقال) أو تغيير مستويات الإسقاط (انظر الأمثلة ٢٠٨ ، ٢٤٨) .

مسائل

٤٦٧ – اقطع كثير الوجوه (موشور أو هرم) بالمستوي P وارسم الانفراد الكلي لأحد جزئيه (الشكل ٨٣٥ – ٨٨٦) .

البحث الثالث والعشرون

الوضعية المشتركة لمستوي وسطح

لإنشاء خط تقاطع سطح ما مع مستوي علينا أن نجد مجموعة نقاط تنتمي بآن واحد للسطح وللمستوي بعدها نصل هذه النقاط بخط مستمر .

للحصول على نقطة ما من خط التقاطع نلجأ لما يلي :

١ ــ نمرر مستوياً مساعداً .

٢ ــ نعين خط تقاطع هذا المستوي مع السطح ومع المستوي المفروض .

٣ ــ أمكنة تقاطع هذين الخطين تعين لنا النقاط المنشودة (غالباً نقطتين) .

وهكذا على التوالي بأخذ مجموعة مستويات مساعدة يمكننا تعيين العدد اللازم من النقاط .

ملاحظة : يختار المستوي المساعد بحيث تكون مساقط خط تقاطعه مع السطح على مستويات الإسقاط بشكل خطوط بسيطة ــ مستقيم أو دائرة .

إذا كان السطح المفروض ذو مولدات مستقيمة فإن خط التقاطع يتعين كذلك برسم مجموعة مولدات على ذلك السطح ثم بوصل نقاط تقاطع هذه المولدات مع المستوي بخط مستمر .

مقطع اسطوانة

إن أي مستوي يقطع سطح اسطوانة دائرية قائمة :

١ ــ وفق دائرة إذا كان المستوي عمودياً على محور الاسطوانة .

٢ ــ وفق قطع ناقص إذا كان المستوي مائلاً على محور الاسطوانة .

٣ ـ وفق مولدين إذا كان المستوي موازياً لمحور الاسطوانة ويبعد عنه بمسافة l أصغر من نصف قطر الاسطوانة .

٤ ـ وفق مولد واحد إذا كان المستوي موازياً لمحور الاسطوانة ويبعد عنه بالمسافة l المساوية لنصف قطر r الاسطوانة (المستوي مماس لسطح الإسطوانة) .

مقطع مخروط

نرمز لزاوية ميل مولد المخروط على القاعدة بـ α ولزاوية ميل المستوي على قاعدة المخروط بـ φ .

إن أي مستوي مار من ذروة مخروط دائري قائم يقطع سطحه :

١ ـ في نقطة إذا كانت φ أصغر من α .

٢ ـ وفق مولد واحد إذا كانت $\varphi = \alpha$ أي عندما يكون المستوي مماساً لسطح المخروط .

٣ ـ وفق مولدين إذا كانت φ أكبر من α أو $\varphi = 90^\circ$ أي عندما يمر المستوي من محور المخروط .

إن أي مستوي لا يمر من رأس المخروط الدائري القائم يقطع سطحه :

١ ـ وفق دائرة إذا كان المستوي عمودياً على محور المخروط أي $\varphi = 0$.

٢ ـ وفق قطع ناقص إذا كانت φ أصغر من α .

٣ ـ وفق قطع مكافىء إذا كانت $\varphi = \alpha$ أي إذا كان المستوي يوازي أحد مولدات المخروط .

٤ ـ وفق قطع زائد إذا كانت φ أكبر من α أو $\varphi = 90°$ أي عندما يكون المستوي موازياً لمحور المخروط .

ملاحظة : لإظهار شكل خط التقاطع عندما يكون المستوي القاطع عاماً يُدوّر المستوي حول محور المخروط حتى يصبح أمامياً إذا كان محور المخروط عمودياً على مستوي الاسقاط الأفقي أو شاقولياً إذا كان محور المخروط عمودياً على مستوي الاسقاط الشاقولي .

مقطع كرة

إن أي مستوي يقطع سطح الكرة وفق دائرة إذا كانت المسافة l بين المستوي ومركز الكرة أصغر من نصف قطر هذه الكرة R .

في الحالة الخاصة يكون المستوي مماساً لسطح الكرة إذا كانت $l = R$.

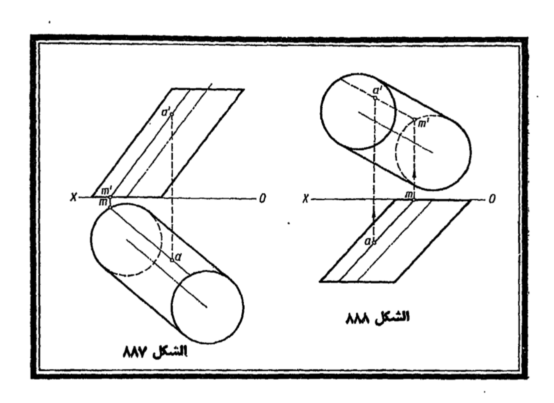
ملاحظة : إن أي سطح دوراني يُقطع وفق دائرة إذا كان المستوي القاطع عمودياً على محوره .

في المستقبل لحل المسائل كثيراً ما يلزمنا أخذ نقطة على سطح لهذا نقوم برسم خط مساعد على هذا السطح (مستقيم ، دائرة) ثم نأخذ نقطة على هذا الخط (انظر الأمثلة) .

أمثلة

● **المثال ٢٧٥ :** عيّن على سطح اسطوانة مائلة نقطة ما A (الشكل ٨٨٧) .

الحل : نأخذ نقطة ما (m , m′) على قاعدة الاسطوانة ونمرر منها مولداً مساعداً . على هذا المولد نأخذ النقطة (a , a′) التي تقع على السطح المفروض .



الشكل ٨٨٧

الشكل ٨٨٨

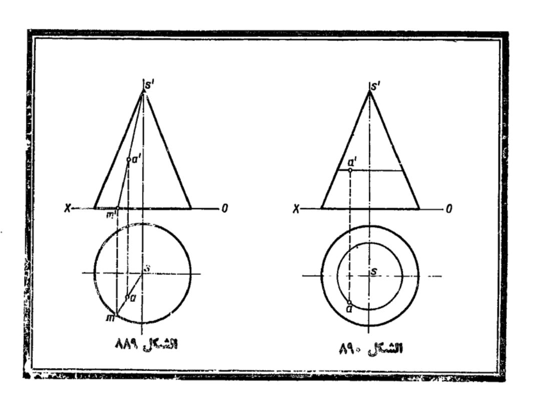
● **المثال ٢٧٦ :** عيّن المسقط الشاقولي للنقطة A الواقعة على سطح الاسطوانة المائلة إذا علمت مسقطها الافقي (الشكل ٨٨٨) .

الحل : نرسم من النقطة a المسقط الأفقي (a m) لمولد مساعد . نعين المسقط الشاقولي (m′) للنقطة M ونرسم منه المسقط الشاقولي للمولد ، ثم نعين عليه بدلالة النقطة a النقطة a′ .

● **المثال ٢٧٧ :** عيّن على سطح المخروط نقطة اختيارية ما A .

الحل : الطريقة الأولى (الشكل ٨٨٩) . نأخذ نقطة ما (m ، m′) على قاعدة المخروط ونمرر منها مولداً مساعداً . على هذا المولد نأخذ النقطة (a،a′) التي تقع على السطح المفروض .

الطريقة الثانية (الشكل ٨٩٠) . نرسم على سطح المخروط دائرة مساعدة مسقطها الشاقولي بشكل خط مستقيم مواز لخط الأرض أما مسقطها الأفقي فبشكل دائرة . على هذه الدائرة تأخذ النقطة (a,a′) التي تقع على السطح المفروض .

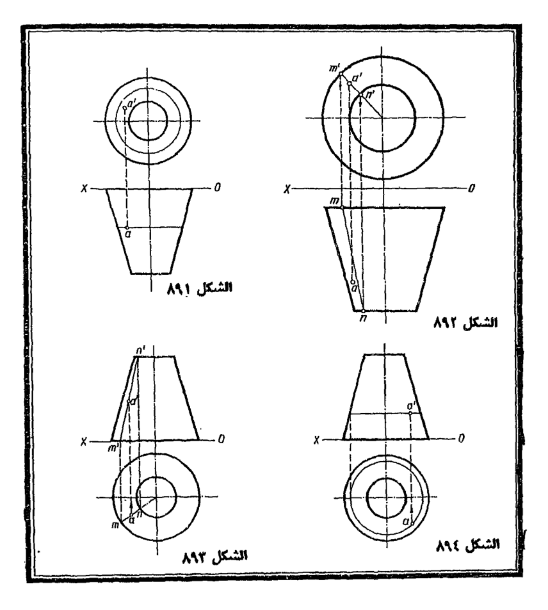


الشكل ٨٨٩

الشكل ٨٩٠

○ المثال ٢٧٨ : هل تقع النقطة A على سطح جذع المخروط ؟

الحل : الطريقة الأولى (الشكل ٨٩١) . نمرر من النقطة a المسقط الأفقي لدائرة مساعدة تقع على سطح المخروط ثم نعين مسقطها الشاقولي . من الرسم يتضح أن النقطة a′ لاتقع على المسقط الشاقولي للدائرة المساعدة إذن النقطة (a , a′)



الشكل ٨٩١

الشكل ٨٩٢

الشكل ٨٩٣

الشكل ٨٩٤

لاتقع على سطح المخروط (حـــل المسألة يمكن أن يبدأ برسم المسقط الشاقولي للدائرة المساعدة) .

الطريقة الثانية (الشكل ٨٩٢) . نمرر من النقطة a' المسقط الشاقولي (m' n') لمولد مساعد ونعين مسقطه الأفقي (m n) . من الرسم يتضح أن المسقط الأفقي (a) للنقطة لايقع على المسقط الأفقي (mn) للمولد وبالتالي النقطة (a,a') لاتقع على سطح المخروط . (هل يمكن البدء بحل المسألة برسم المسقط الأفقي للمولد دون تعيين المسقط الأفقي لذروة المخروط ؟) .

● **المثال ٢٧٩ :** عيّن المسقط الشاقولي للنقطة A الواقعة على سطح جذع المخروط إذا عرف مسقطها الأفقي .

الحل : الطريقة الأولى (الشكل ٨٩٣) . نرسم من النقطة a المسقط الأفقي (mn) لمولد مساعد ونعين مسقطه الشاقولي (m'n') ثم نعين عليه بدلالة a النقطة a' .

الطريقة الثانية (الشكل ٨٩٤) . نرسم من النقطة a المسقط الأفقي لدائرة مساعدة تقع على سطح المخروط ثم نعين مسقطها الشاقولي وبالتالي نجد بدلالة a النقطة a' .

(هل يمكننا بالطريقة الأولى حل المسألة العكسية : أي من المسقط الشاقولي للنقطة أن نعين المسقط الأفقي دون اللجوء لرسم المسقط الشاقولي لذروة المخروط ؟) .

● **المثال ٢٨٠ :** أوجد المسقط الشاقولي للنقطة A الواقعة على سطح مخروط مائل إذا عرف مسقطها الأفقي (الشكل ٨٩٥)

الحل : نمرر من النقطة a المسقط الأفقي (s m) لمولد مساعد . نعين المسقط الشاقولي (m') للنقطة M ونرسم منها المسقط الشاقولي (s' m') للمولد ثم نعين عليه بدلالة النقطة a النقطة المطلوبة a'

● المثال ٢٨١ : أوجد المسقط الأفقي للنقطة A الواقعة على سطح مخروط إذا عرف مسقطها الشاقولي .

الحل : الطريقة الأولى (الشكل ٨٩٦) . نرسم المسقط الجنبي للمخروط . نمرر من النقطة 'a المسقط الشاقولي لدائرة مساعدة تقع على سطح المخروط ثم نعين مسقطها الجنبي . بدلالة النقطة 'a نجد النقطة "a ومن هذين المسقطين نجد النقطة a .

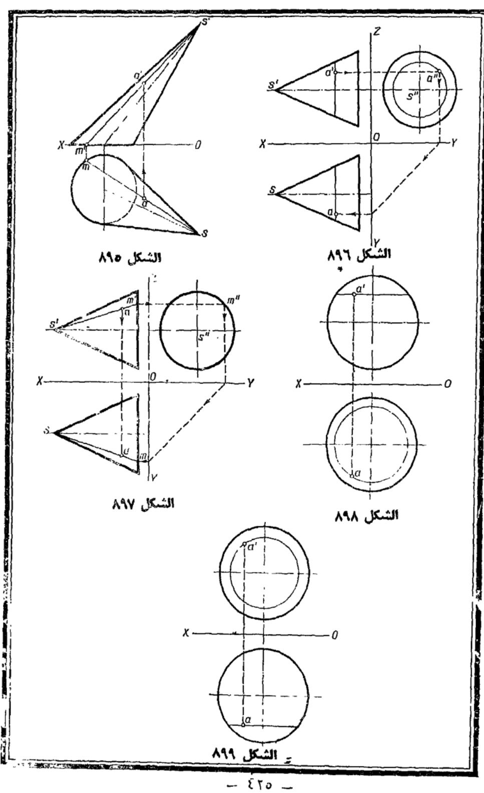
الطريقة الثانية (الشكل ٨٩٧) نرسم المسقط الجنبي للمخروط . نمرر من النقطة 'a المسقط الشاقولي ('s'm) لمولد مساعد . نعين المسقط الجنبي "m للنقطة M ثم بدلالة النقطتين "m و 'm نعين النقطة m . نرسم المسقط الأفقي (sm) للمولد وعليه نعين النقطة a .

● المثال ٢٨٢ : اختر على سطح الكرة نقطة ما A .

الحل : الطريقة الأولى (الشكل ٨٩٨). نرسم على سطح الكرة دائرة مساعدة تتوضع موازية لمستوي الإسقاط الأفقي .إنّ مسقطها الشاقولي بشكل خط مستقيم يوازي خط الأرض أما مسقطها الأفقي فبشكل دائرة . على هذه الدائرة المساعدة نأخذ نقطة اختيارية ('a ، a) التي ستقع على السطح المفروض .

الطريقة الثانية (الشكل ٨٩٩) . نرسم على سطح الكرة دائرة مساعدة تتوضع موازية لمستوي الإسقاط الشاقولي . مسقطها الأفقي بشكل خط مستقيم يوازي خط الأرض أما مسقطها الشاقولي فبشكل دائرة . على هذه الدائرة المساعدة نأخذ نقطة اختيارية ('a،a) التي ستقع على السطح المفروض .

● المثال ٢٨٣ : أوجد المسقط الأفقي للنقطة A الواقعة على سطح كرة إذا عرف مسقطها الشاقولي .



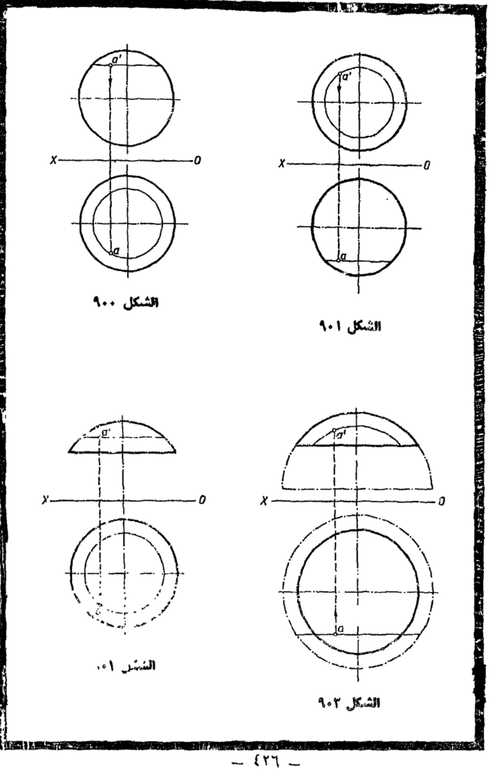
الشكل ٨٩٥

الشكل ٨٩٦

الشكل ٨٩٧

الشكل ٨٩٨

الشكل ٨٩٩



الشكل ٩٠٠

الشكل ٩٠١

الشكل ٩٠٢

الشكل ٩٠٣

الحل : الطريقة الأولى (الشكل ٩٠٠) . نرسم من النقطة 'a المسقط الشاقولي لدائرة مساعدة تتوضع على سطح الكرة موازية لمستوي الإسقاط الأفقي . نعين المسقط الأفقي لهذه الدائرة وبالتالي بدلالة النقطة 'a نجد النقطة a .

الطريقة الثانية (الشكل ٩٠١). نمرر من النقطة 'a المسقط الشاقولي لدائرة مساعدة تقع على سطح الكرة وموازية لمستوي الإسقاط الشاقولي . نعين المسقط الأفقي لهذه الدائرة ثم بدلالة النقطة 'a نعين النقطة a .

● **المثال ٢٨٤** : أوجد المسقط الشاقولي للنقطة A الواقعة على سطح قطاع كروي إذا عرف مسقطها الأفقي .

الحل : الطريقة الأولى (الشكل ٩٠٢) . نمرر من النقطة a المسقط الأفقي لدائرة مساعدة تقع على سطح القطاع الكروي وموازية لمستوي الإسقاط الأفقي . نعين المسقط الشاقولي لهذه الدائرة ثم بدلالة النقطة a نعين النقطة 'a .

الطريقة الثانية (الشكل ٩٠٣) . نكمل القطاع الكروي حتى نصف كرة ثم نمرر من النقطة a المسقط الأفقي لنصف دائرة مساعدة تقع على سطح نصف الكرة وتوازي مستوي الإسقاط الشاقولي . نعين المسقط الشاقولي لنصف الدائرة ثم بدلالة النقطة a نعين النقطة 'a .

● **المثال ٢٨٥** : اختر على سطح نصف الحلقة نقطة ما A (الشكل ٩٠٤) .

الحل : نرسم على سطح نصف الحلقة نصف دائرة مساعدة تقع موازية لمستوي الإسقاط الشاقولي . مسقطها الأفقي بشكل خط مستقيم موازٍ لخط الأرض أما مسقطها الشاقولي فبشكل نصف دائرة . نأخذ على نصف الدائرة المساعدة النقطة ('a،a) التي تقع على السطح المفروض .

● **المثال ٢٨٦** : أوجد المسقط الشاقولي للنقطة A الواقعة على سطح نصف حلقة إذا عرف مسقطها الأفقي (الشكل ٩٠٥) .

الحل : نمرر من النقطة a المسقط الأفقي لنصف دائرة مساعدة تتوضع على سطح نصف الحلقة موازية لمستوي الإسقاط الشاقولي . نعين المسقط الشاقولي لنصف الدائرة هذه ثم بدلالة النقطة a نجد النقطة a′

● **المثال ٢٨٧** : أوجد المسقط الشاقولي للنقطة A الواقعة على سطح حلقة إذا عرف مسقطها الأفقي (الشكل ٩٠٦) .

الحل : نمرر من النقطة a المسقط الأفقي لدائرة مساعدة تقع على سطح الحلقة وتوازي مستوي الإسقاط الأفقي . نعين المسقط الشاقولي لهذه الدائرة ثم بدلالة النقطة a نجد النقطة a′ .

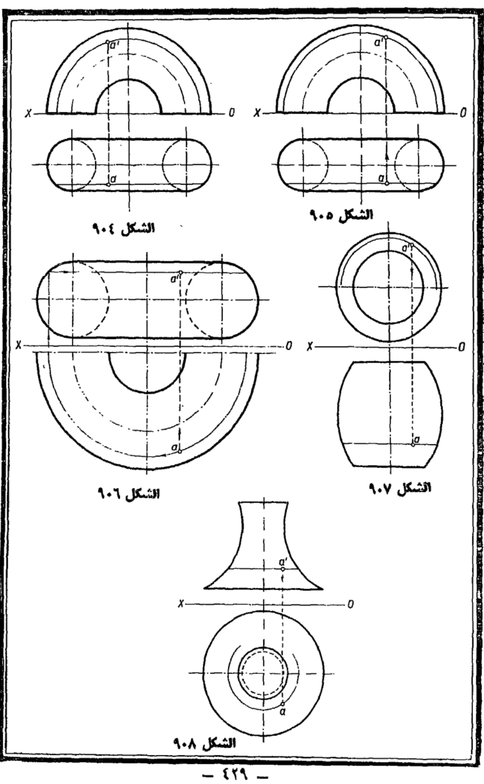
● المثال ٢٨٨ : أوجد المسقط الأفقي للنقطة A الواقعة على سطح دوراني إذا عرف مسقطها الشاقولي (الشكل ٩٠٧) .

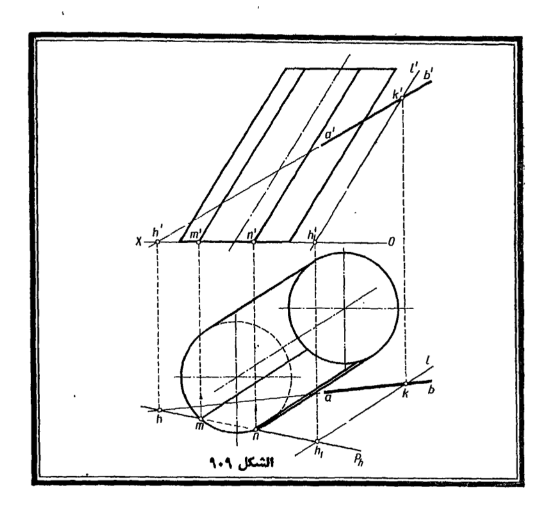
الحل : نمرر من النقطة a′ المسقط الشاقولي لدائرة مساعدة تقع على السطح الدوراني . نعين المسقط الأفقي لهذه الدائرة ثم بدلالة النقطة a′ نجد النقطة a .

● **المثال ٢٨٩** : أوجد المسقط الأفقي للنقطة A الواقعة على سطح دوراني إذا عرف مسقطها الشاقولي (الشكل ٩٠٨) .

الحل : نمرر من النقطة a′ المسقط الشاقولي لدائرة مساعدة تقع على السطح الدوراني ثم نعين مسقطها الأفقي وبالتالي بدلالة النقطة a′ نجد النقطة a

● **المثال ٢٩٠** : أنشئ من المستقيم ... ... بأ يقطع سطح اسطوانة مائلة وفي المولدات ثم أوجد هذه المولدات (الشكل ٩٠٩) .


a'
X
0
a
الشكل ٩٠٤
a'
X
0
a
الشكل ٩٠٥
a'
X
0
a
الشكل ٩٠٦
a'
X
0
a
الشكل ٩٠٧
a'
X
0
a
الشكل ٩٠٨



الشكل ٩٠٩

الحل : نأخذ على المستقيم (ab,a'b') نقطة ما (k,k') ونرسم منهـــا المستقيم (kl,k'l') الموازي لمحور الاسطوانة . المستقيان (kl,k'l') و (ab,a'b') يعينان المستوي المطلوب . نعين الآثار الأفقية (h_1,h'_1) و (h,h') لهذه المستقيات وبوصل النقطتين h , h_1 نجد الأثر الأفقي (P_h) للمستوي الذي يتقاطع مـع قاعدة الاسطوانـة في

النقطتين (n,n') و (m,m') . من هذه النقاط نوسم المولدات المطلوبة .

ملاحظة : في الحالة الخاصة (متى ؟) يمكن أن يمس الأثر الأفقي (P_h) قاعدة الاسطوانة عندها يكون المستوي مماساً لسطح الأسطوانة .

● **المثال ۲۹۱ :** مررمن النقطة A مستوياً مماساً لسطح اسطوانة مائلة (الشكل ۹۱۰) .

الحل : نمرر من النقطة (a,a') مستقيماً موازياً لمحور الاسطوانة ونعين أثره الشاقولي (v,v') . نمرر من النقطة v' المستقيمين $v'k'$ و $v'k'_1$ المماسين للمسقط الشاقولي لقاعدة الاسطوانة في النقطتين m'_1 و m' . من النقطتين (m_1,m'_1) و (m,m') ننشىء المولدات $(m_1n_1,m'_1n'_1)$ و $(mn,m'n')$ التي هي خطوط التماس . المستقيمات $(vk_1,v'k'_1)$ و $(vk,v'k')$ مع خطوط التماس الموافقة تعين لنا المستويات المنشودة .

يمكن تمثيل هذه المستويات بآثارها (كيف ؟) .

● **المثال ۲۹۲ :** ارسم مستوياً اختيارياً يقطع سطح المخروط وفق المولدات وأوجد هذه المولدات (الشكل ۹۱۱) .

الحل : المستوي القاطع P يجب أن يمر من ذروة المخروط (s,s') . نوسم من النقطة (s,s') مستقيماً أفقياً اختيارياً ونعين أثره الشاقولي (v,v') . نأخذ على خط الأرض نقطة اختيارية P_x وننشىء آثار هذا المستوي P_h , P_v . المستوي P يقطع قاعدة المخروط وفق الوتر $(mn , m'n')$. بوصل ذروة المخروط (s,s') بنهايات الوتر (n,n') و (m,m') نحصل على المولدات المنشودة $(sn,s'n')$ و $(sm,s'm')$.

ملاحظة : يمكن اختيار النقطة P_x بحيث يمس الأثر الأفقي (P_h) للمستوي قاعدة المخروط عندها يصبح المستوي مماساً لسطح المخروط .

● **المثال ٢٩٣** : لدينا مخروط والأثر الشاقولي للمستوي P الذي يقطع سطح المخروط وفق المولدات . أوجد هذه المولدات (الشكل ٩١٢) .

الحل : بما أن المستوي P يجب أن يمر من ذروة المخروط (s,s') التي تقع في مستوي الاسقاط الأفقي لذا ننشيء الأثر الأفقي (P_h) للمستوي بحيث يمر من النقطتين P_x و s . نعين نقاط تقاطع المستوي P مع دائرة القاعدة التي بوصلها بذروة المخروط (s,s') نجد المولدات المطلوبة (sn,s'n') و (sm,s'm') .

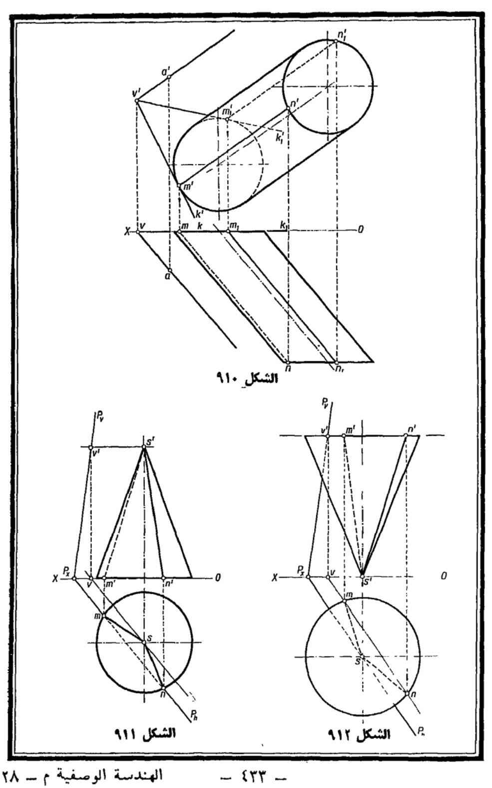
● **المثال ٢٩٤** : أنشيء مستوياً مماساً لسطح المخروط إذا عرف المسقط الشاقولي (a') لنقطة من خط التماس (الشكل ٩١٣) .

الحل : نمرر من النقطة a' المسقط الشاقولي (s'm') المولد ونعين مسقطه الأفقي (sm) . نرسم من النقطة (m,m') مستقيماً جبهياً يمس دائرة قاعدة المخروط . إن المستقيم الجبهي والمولد (sm,s'm') يعينان المستوي المطلوب . يمكن تمثيل هذا المستوي بآثاره (كيف ؟) .

● **المثال ٢٩٥** : أنشيء مساقط خط تقاطع المستوي P مع سطح الاسطوانة (الشكل ٩١٤) .

الحل : إن المستوي P يقطع سطح الاسطوانة وفق قطع ناقص مسقطه الشاقولي ينطبق مع الأثر الشاقولي (P_v) للمستوي أما مسقطه الأفقي فينطبق مع المسقط الأفقي للاسطوانة . القيمة الحقيقية للقطع الناقص يمكن أن نبينها من المحاور الأساسية : المحور الكبير يساوي القطعة $\alpha'\beta'$ أما المحور الصغير فيساوي قطر الاسطوانة .

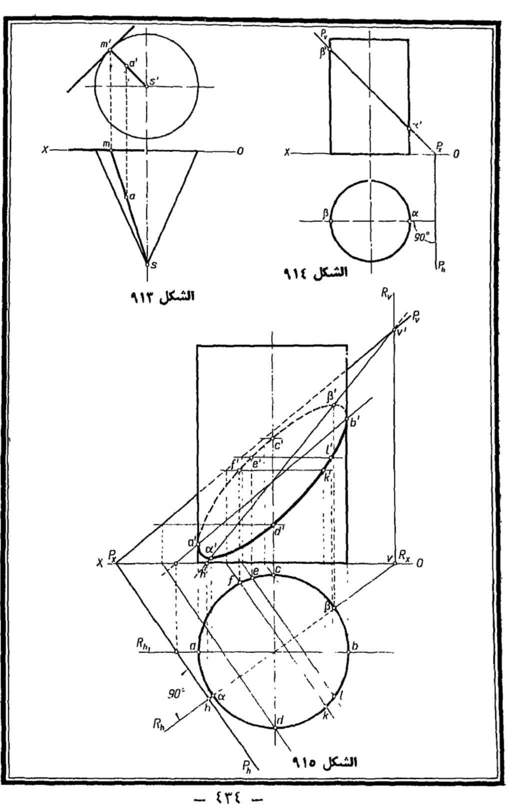
النقطة (α , α') هي النقطة الدنيا لخط التقاطع أما النقطة (β,β') فهي نقطته العليا



الشكل ٩١٠

الشكل ٩١١

الشكل ٩١٢



الشكل ٩١٣

الشكل ٩١٤

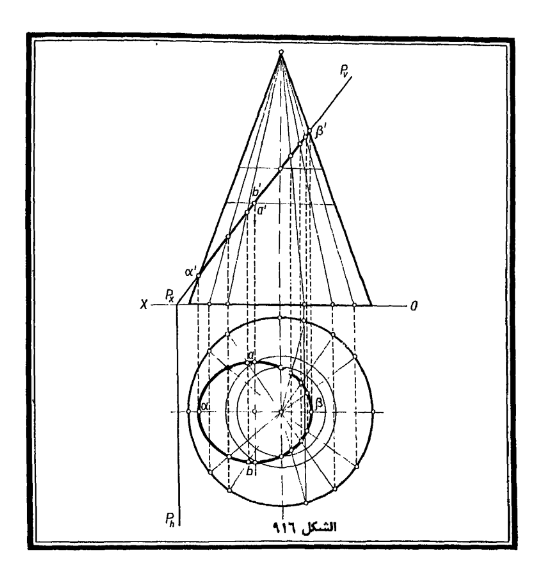
الشكل ٩١٥

● **المثال ٢٩٦** : انشىء مساقط خط تقاطع المستوي P مع سطح الاسطوانـــة (الشكل ٩١٥) .

الحل : نرسم من محور الاسطوانة المستوي الشاقولي R العمودي على المستويP. المستوي R يقطع سطح الاسطوانـــة وفق المولدات ويقطـــع المستوي P وفق المستقيم (hv,h′v′) ومكان تقاطع هذه المستقيمات نجد النقطة الدنيا (α,α') والنقطة العليا (β,β') من خط التقاطع . من محور الاسطوانة ننشىء مستوياً R_1 موازياً لمستوي الاسقاط الشاقولي. المستوي R_1 يقطع سطح الاسطوانةوفق المولداتالجانبية والمستوي P وفق مستقيم جبهي ومكان تقاطع هذه المستقيمات نجد النقاط (b،b′)،(a،a′) من خط التقاطع . نعين نقاط تقاطع المولدات الجانبية للاسطوانة مع المستوي P . المساقط الأفقية (d) ، (c) لهذه النقاط معروفة (لماذا ؟) ، وباستخدام المستقيمات الأفقية نعين المساقط الشاقولية (d′) ، (c′) . بصورة مماثلة نعين نقاط تقاطع عدة مولدات أخرى مع المستوي . بوصل المساقط الشاقولية لجميع النقاط المعينة على التتابع نجد المسقط الشاقولي لخط التقاطع (للقطع الناقص) . القيمة الحقيقية لقطع الناقص يمكن تعيينها من المحاور الأساسية : المحور الكبير المساوي لطول القطعة $(\alpha\beta$ ، $\alpha_1\beta_1)$ والمحور الصغير المساوي لقطر الاسطوانة .

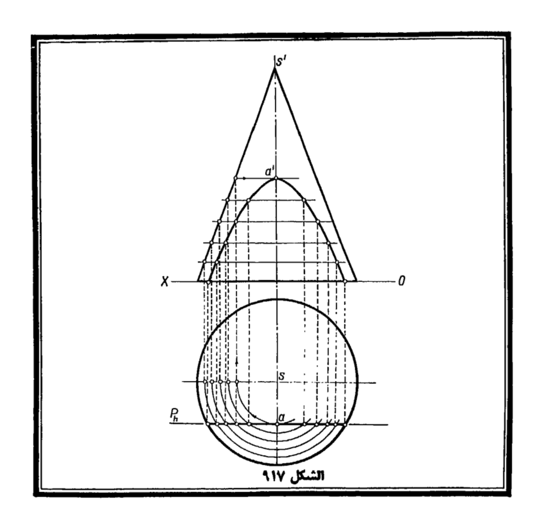
● **المثال ٢٩٧** : انشىء مساقط خط تقاطـع المستوي P مـع سطح المخروط (الشكل ٩١٦) .

الحل : يقطع المستوي P سطح المخروط وفق قطع ناقص ، مسقطه الشاقولي ينطبق مع الأثر الشاقولي (P_v) للمستوي أما مسقطه الأفقي فينشأ بطريقة النقاط :



الشكل ٩١٦

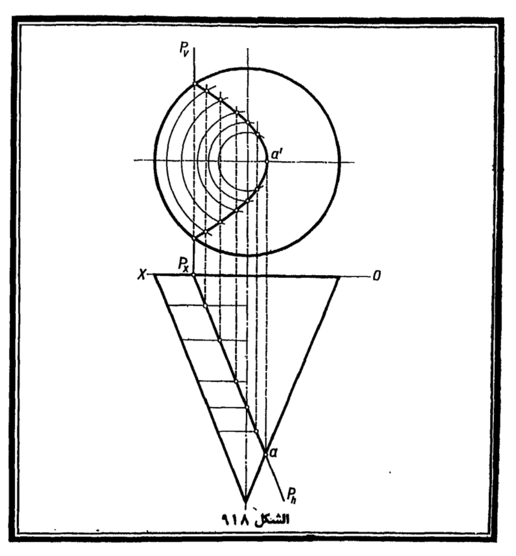
نأخذ المساقط الشاقولية لمجموعة نقاط من خط التقاطع ونعين مساقطها الأفقية (انظر الأمثلة (٢٧٩ – ٢٨١) ثم نصل المساقط الأفقية لهـذه النقاط بخط انسيابي (قطـع ناقص) . المسقط الأفقي لخط التقاطع كقطع ناقص يمكن أن يرسم بمساعدة المحـاور الأساسية : المحور الكبير $\alpha\beta$ والمحور الصغير ab . القيمـة الحقيقية للقطـع الناقص



الشكل ٩١٧

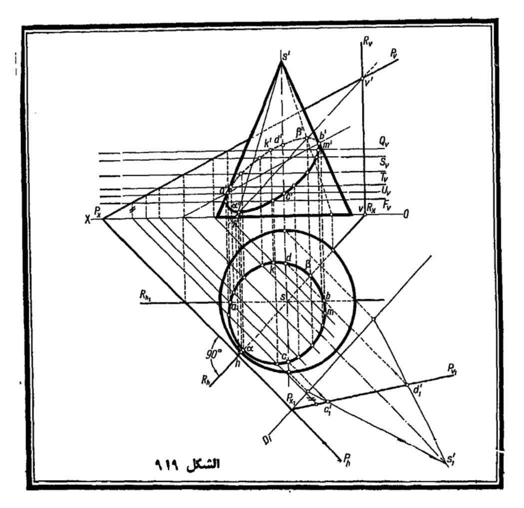
تعين من محاوره الأساسية : المحور الكبير $\alpha'\beta'$ والمحور الصغير ab الذي نعينه من المسقط الشاقولي (a'b') .

● **المثال ٢٩٨** : انشيء مساقط خط تقاطع المستوي P مع سطح المخروط (الشكل ٩١٧) .



الشكل ٩١٨

الحل : يقطع المستوي P سطح المخروط وفق قطع زائد ذروته في النقطـة (a , a′) ، ومسقطه الأفقي ينطبق مع الأثر الأفقي (P_h) للمستوي أما مسقطه الشاقولي فينشأ بالنقاط : نأخذ المساقط الأفقية لمجموعة نقاط من خط التقـــاطع ونعين مساقطها الشاقولية (انظر المثال ٢٧٩ - ٢٨١) ثم نصل هذه المساقط الشاقولية بخط انسيابي (قطع زائد) .



الشكل ٩١٩

● **المثال ٢٩٩** : انشيء مساقط خط تقاطع المستوي P مـــع سطح المخروط (الشكل ٩١٨) .

الحل : يقطع المستوي P سطح المخروط وفق قطـع مكافيء ذروته تقـع في النقطة (a , a′) ومسقطه الأفقي ينطبق مع الأثر الأفقي (P_h) للمستوي أمـا مسقطه الشاقولي فينشأ بالنقاط : نأخذ المساقط الأفقية لمجموعة نقـاط من خط التقاطع ونعين مساقطها الشاقولية ثم نصل هذه المساقط بخط انسيابي (قطع مكافيء).

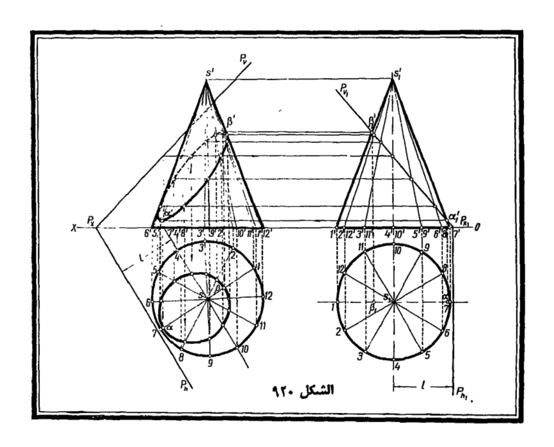
● **المثال ٣٠٠ :** انشىء مساقط خط تقاطع المستوي P مع سطح المخروط .

الحل : الطريقة الأولى (الشكل ٩١٩) . نرسم من محور المخروط مستوياً شاقولياً R عمودياً على المستوي P ، هـــذا المستوي R يقطع سطح المخروط وفق المولدات والمستوي P وفق المستقيم ($hv, h'v'$) ومكان تقاطع هذه المستقيمات نجد النقطة الدنيا (α, α') والعليا (β, β') لخط التقاطع . نرسم من محور المخروط المستوي R_1 الموازي للمستوي الشاقولي للاسقاط فيقطع سطح المخروط وفق المولدات الجانبية والمستوي P وفق مستقيم جبهي ومكان تقاطع هذه المستقيمات نجد أيضاً النقطتـين (b, b') و (a, a') من خط التقاطع .

للحصول على نقاط خط التقاطع الواقعة على المولدات الجنبية نستعيض عـــن مستوي الاسقاط الشاقولي بمستو جديد (V_1) بحيث يصبح المستوي P مستويـــاً أمامياً ونعين النقاط (d, d_1') و (c, c_1') لتقاطع هذه المولدات مع المستوي P_1 ثم نعين النقاط (d, d') و (c, c') .

لتعيين بعض النقاط الأخرى من خط التقاطع نلجـــأ لما يلي : نمرر بين النقطتين (β, β') و (α, α') مستوياً مساعداً Q موازياً للمستوي H فيقطع سطح المخروط وفق دائرة والمستوي P وفق مستقيم أفقي مـكان تقاطعها نجـــد النقطتين المنشودتين (m, m') و (k, k') . بصورة مماثلة نعين عدة نقاط اخرى ثم نصل المساقط المتماثلة للنقاط المعينة بخطوط انسيابية ـ قطوع ناقصة .

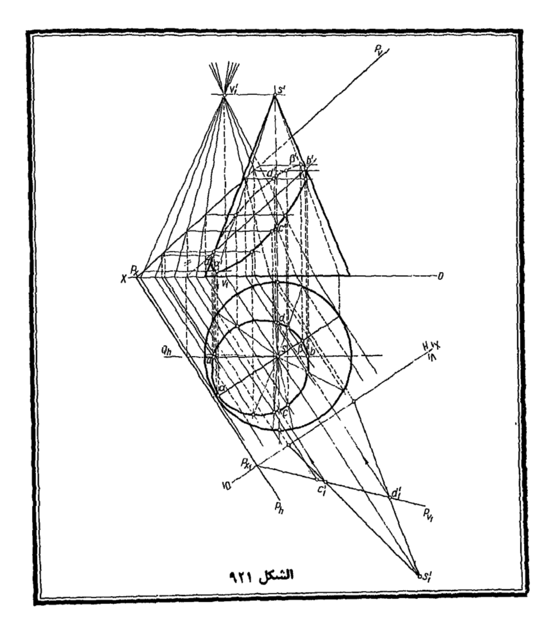
الطريقة الثانية (الشكل ٩٢٠) . ننقل المجموعة المعطاة بصورة موازية لمستوي الإسقاط الأفقي حتى يصبح المستوي P أمامياً .



الشكل ٩٢٠

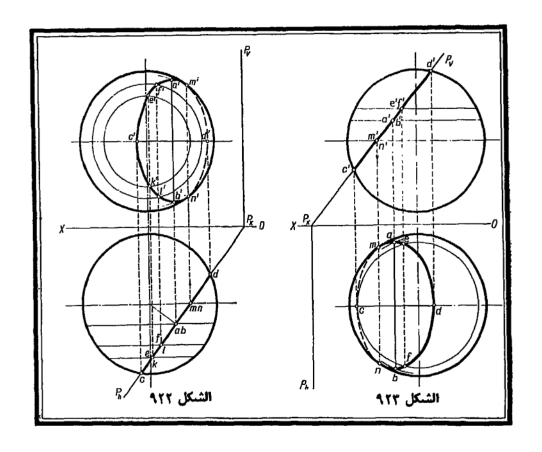
نعين مساقط خط التقاطع ثم بانتقال معاكس نعين مساقط خط التقاطع في الحالة الأولى (انظر الرسم) .

الطريقة الثالثة (الشكل ٩٢١) . النقطتان(a ، a′) و(b،b′)على المولدات الجانبيةوالنقطتان (d،d′)و (c، c′) على المولدات الجنبية للمخروط تعين كما سبقوذكرنا في الطريقة الأولى . للحصول على نقاط أخرى ثانوية نستخدم مستويات مساعدة تمر من ذروة المخروط (s، s′) وآثارها الأفقيـــة توازي الأثر P_h . كل من هذه المستويات تقطع سطح المخروط وفق مولدين والمستوي P وفق مستقيم افقي ، مكان



الشكل ٩٢١

تقاطعها نجد نقطتين من خط التقاطع المنشود . لتعيين النقطتين (β , β')و(α,α') ننشيء مستويات مساعدة مماسة للمخروط . مكان تقاطع خطوط التماس ــ المولدات ــ والمستقيمات الأفقية يعين لنا هذه النقــاط . من المساقط المتماثلة لجميع النقاط



المعينة نرسم خطوطاً انسيابية (قطوع ناقصة) .

● **المثال ٣٠١ :** أنشيء مساقط خط تقاطع المستوي P مـــع سطح الكرة (الشكل ٩٢٢) .

الحل : يقطع المستوي P سطح الكرة وفق دائرة مسقطهـا الأفقي (c d) ينطبق مع الأثر الأفقي (P_h) للمستوي ومسقطها الشاقولي بشكل قطع ناقص يمكن إنشاؤه بواسطة المحاور الأساسية : المحور الكبـــير هو المسقط الشاقولي (a′ b′) للقطر المتوضع عمودياً على مستوي الاسقاط الأفقي والمحور الصغير هو المسقط الشاقولي (c′ d′) للقطر المتوضع موازياً لمستوي الإسقاط الأفقي .

يمكن انشاء المسقط الشاقولي للدائرة بطريقة النقاط : نأخذ المساقط الأفقية لمجموعة نقاط من الدائرة ونعين مساقطها الشاقولية (انظر الأمثلة ٢٨٣ و ٢٨٤) ثم نصل النقاط المعينة بخط مستمر (قطع ناقص) .

لفصل الجزء المرئي من المسقط الشاقولي للمنحني عن جزئه اللامرئي نعين المساقط الشاقولية (n′) و (m′) لنقاطه الواقعة على خط الطول الأساسي .

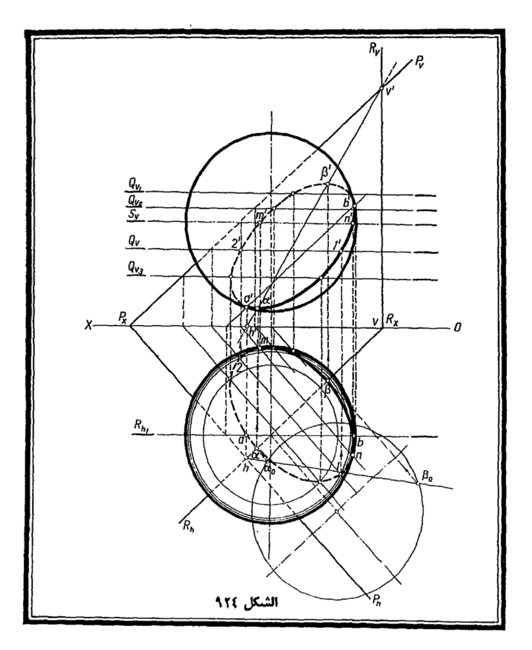
● **المثال ٣٠٢ :** انشيء مساقط خط تقاطع المستوي P مع سطح الكرة (الشكل ٩٢٣) .

الحل : يقطع المستوي P سطح الكرة وفق دائرة مسقطها الشاقولي (c′,d′) ينطبق مع الأثر الشاقولي (P_v) للمستوي ومسقطها الأفقي بشكل قطع ناقص يمكن إنشاؤه بمساعدة المحاور الأساسية : المحور الكبير وهو المسقط الأفقي (a b) للقطر العمودي على مستوي الاسقاط الشاقولي والمحور الصغير وهو المسقط الأفقي (c d) للقطر الموازي لمستوي الاسقاط الشاقولي .

يمكن إنشاء المسقط الأفقي للدائرة بطريقة النقاط لهذا نأخذ المساقط الشاقولية لمجموعة نقاط من هذه الدائرة ونعين مساقطها الأفقية (انظر الأمثلة ٢٨٣ ، ٢٨٤) ثم نصل النقاط الحاصلة بخط مستمر (قطع ناقص) .

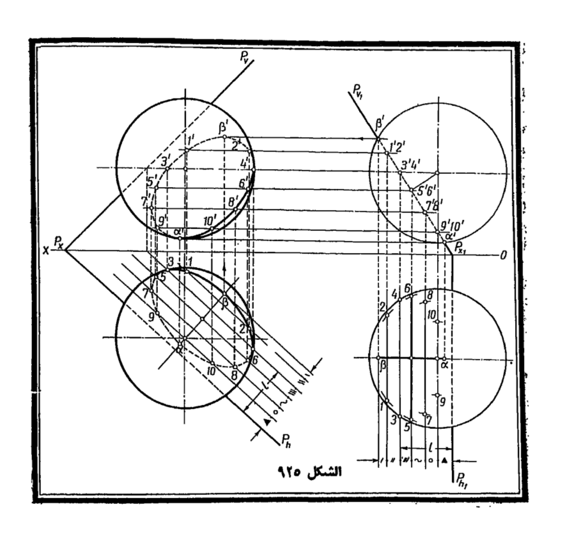
● **المثال ٣٠٣ :** أنشيء مساقط خط تقاطع المستوي P مع سطح الكرة .

الحل : الطريقة الأولى (الشكل ٩٢٤) . نرسم من مركز الكرة مستوياً شاقولياً R عمودياً على المستوي P فيقطع سطح الكرة وفق دائرة والمستوي P وفق المستقيم (hv , h′v′) مكان تقاطعها يعين لنا النقطة الدنيا (α,α') والنقطة العليا (β , β') لخط التقاطع . حتى لانشيء القطع الناقص على مستوي الإسقاط الشاقولي نطبق المستوي R على مستوي الاسقاط الأفقي ونعين



الشكل ٩٢٤

بصورة أوليـــة هذه النقاط في وضعية الانطباق (انظر الرسم) . لتعيين النقاط الثانوية من خط التقاطع نمرر بين النقطتين (β,β') و (α,α') بمجموعة مستويات مساعدة Q_1، Q ... موازية لمستوي الإسقاط الأفقي . مثلًا المستوي Q يقطع سطح الكرة



الشكل ٩٢٥

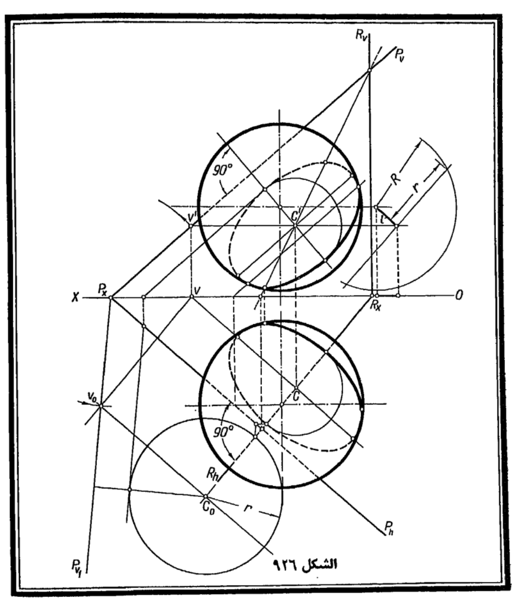
وفق دائرة: والمستوي P وفق مستقيم أفقي مـــكان تقــاطعها يعين لنا النقطتين
. (1،1') ، (2،2')

لفصل الجزء المرئي من المسقط الشاقولي عن الجزء اللامرئي نمرر من مركز الكرة

مستوياً R_1 موازياً لمستوي الاسقاط الشاقولي . هذا المستوي R_1 يقطع سطح الكرة وفق خط الطول الأساسي والمستوي P وفق مستقيم جبهي ، مكان تقاطعهما نجد النقطتين (b,b′) , (a,a′) . لفصل الجزء المرئي من المسقط الأفقي عن الجزء اللامرئي نمرر من مركز الكرة المستوي S ، الموازي لمستوي الاسقاط الأفقي . هذا المستوي يقطع سطح الكرة وفق « خط الاستواء » والمستوي P وفق مستقيم أفقي مكان تقاطعهما نجد النقطتين (n,n′) , (m,m′) . بعدها نصل المساقط المتماثلة لجميع النقاط الحاصلة بخط مستمر ـ قطوع ناقصة .

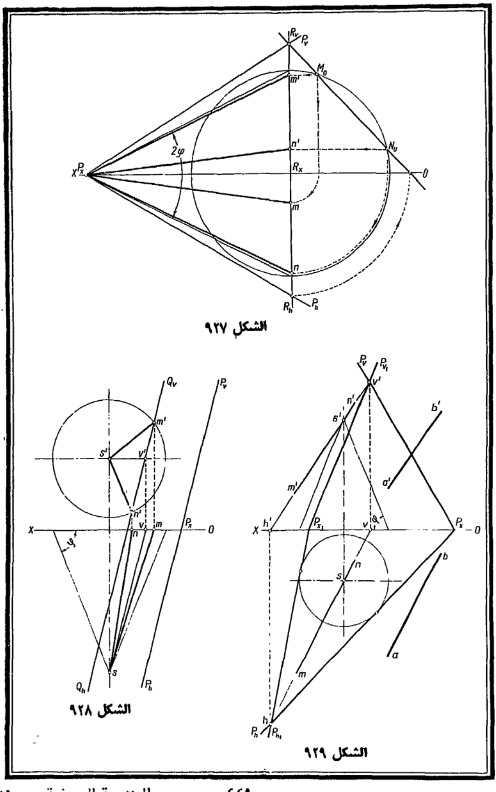
الطريقة الثانية (الشكل ٩٢٥) . ننقل المجموعة المفروضة بصورة موازية لمستوي الاسقاط الأفقي حتى الوضعية بحيث يصبح المستوي P أمامياً بعدها نعين مساقط خط التقاطع ثم بانتقال عكسي نجـــد مساقطه في الوضعية الأولية ـ قطوع ناقصـــة (الإنشاء واضح من الرسم) .

الطريقة الثالثة (الشكل ٩٢٦) . ننزل من مركز الكرة عموداً على المستوي P ونعين قاعدته (c , c′) ـ مركز الدائرة . باستخدام انشاء مساعد (انظر الرسم) نعين نصف قطر r هذه الدائرة من القيمة الحقيقية للمسافة l من مركز الكرة حتى المستوي P ومن نصف قطر R الكـــرة . نطبق المستوي P على



الشكل ٩٢٦

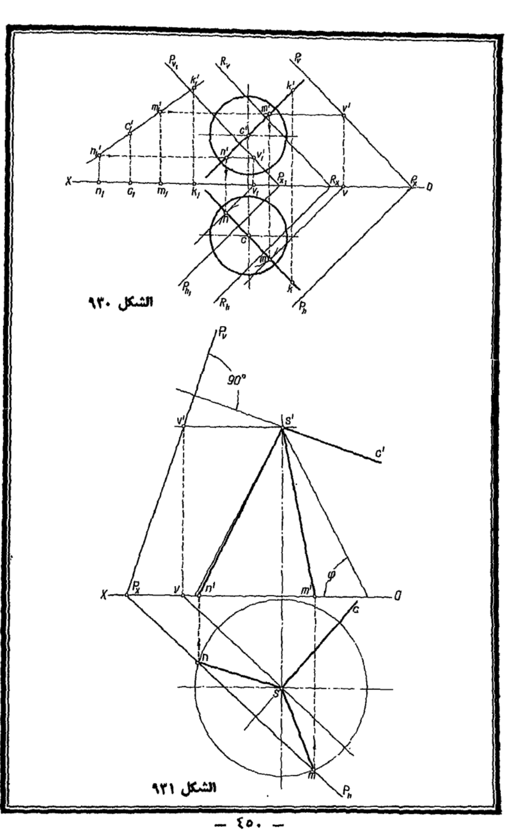
مستوي الاسقاط الأفقي ونعين وضعية (C_0) مركز الدائرة . نرسم في وضعية الانطباق هذه الدائرة ثم نعين مساقطها (انظر المثال ٢٢٩) .



الشكل ٩٢٧

الشكل ٩٢٨

الشكل ٩٢٩



الشكل ٩٣٠

الشكل ٩٣١

● **المثال ٣٠٤ :** انشيء في المستوي P مستقيماً يشكل مع خط الأرض زاوية قدرها φ (الشكل ٩٢٧) .

الحل : المحل الهندسي للمستقيمات المشكلة في الفراغ مع خط الأرض الزاوية المفروضة هو سطح مخروطي دوراني قائم ذو زاوية قدرها 2φ في ذروتـــه P_x . المستقيمات المطلوبة ماهي إلا مولدات المخروط التي يقطع بها المستوي P هذا السطح (الإنشاء واضح من الرسم) .

● **المثال ٣٠٥ :** لدينا النقطة S والمستوي P . انشيء من النقطة S مستقيماً يوازي المستوي P ويشكل مع مستوي الإسقاط الشاقولي زاوية φ (الشكل ٩٢٨) .

الحل : المحل الهندسي في الفراغ للمستقيمات المارة من نقطـة S والمائلة على مستوي الاسقاط الشاقولي بزاوية قدرها φ هو سطح مخروطي دوراني قائم ذروته في النقطة S ومولداته تميل على مستوي الإسقاط الشاقولي بزاوية قدرهـــا φ . المستقيمات المطلوبة هي تلك المولدات التي يقطع بها المستوي Q المار من النقطة S والموازي للمستوي P هذا السطح المخروطي (الانشاء واضح من الرسم) .

● **المثال ٣٠٦ :** لدينا النقطة S والمستقيم AB . أنشيء من النقطة S المستوي P الذي يميل على مستوي الاسقاط الأفقي بزاوية مفروضة φ ويوازي المستقيم AB (الشكل ٩٢٩) .

الحل : إن المستوي الذي يميل على مستوي الإسقاط الأفقي بزاوية مفروضة φ ويمر من النقطة S هو أي مستوي مماسي لسطح مخروطي دوراني قائم ذروته في النقطة S ومولداته تشكل مع مستوي الإسقاط الأفقي نفس الزاوية φ . المستوي

المنشود هو أحد هذه المستويات الذي يحتوي مستقيماً موازياً لـ AB . وهكـذا ننشيء من النقطة S ـ ذروة المخروط ـ مستقيماً MN موازيـاً للمستقيم AB ثم نضمن هذا المستقيم في مستو مماس لسطح المخروط . للمسألة حـــلان (الإنشاء واضح من الرسم) .

● **المثال ٣٠٧ :** انشيء مستوياً مماسـاً لسطـح الكرة وموازيـاً للمستوي R (الشكل ٩٣٠) .

الحل : ننشيء من مركز الكرة (c , c′) مستقيماً عمودياً على المستوي R ونعين نقطتي تقاطعه (m,m′),(n,n′) مع سطح الكرة . وهنا من السهولة بمكان أن نأخذ على هذا المستقيم القطع (cm,c′m′),(cn,c′n′) المساوية لنصف قطر الكرة . ثم ننشيء من النقاط الحاصلة (n,n′),(m,m′) المستويين P, P_1 الموازيين للمستوي R أو (ذات الشيء) مستويين عموديين على المستقيم (mn ,m′n′) (الإنشاء واضح من الرسم) .

● **المثال ٣٠٨ :** أنشيء من النقطـة S مستقيماً يشكل مـع مستوي الإسقاط الأفقي زاوية قدرها φ ويتعامد مع المستقيم CS (الشكل ٩٣١) .

الحل : المحل الهندسي للمستقيمات المارة من النقطة S والتي تشكل مع مستوي الاسقاط الأفقي زاوية φ هو سطح مخروطي دوراني قائم ذروته في النقطة S ومولداته تميل على مستوي الإسقاط الأفقي بالزاوية φ . كذلك فإن المحل الهندسي في الفراغ للمستقيمات المارة من النقطة S والعمودية على المستقيم CS هو المستوي العمودي على المستقيم CS . وهكذا المستقيمات المنشودة هي نتيجة تقاطع سطح المخروط بمستو عمودي على المستقيم CS (الإنشاء واضح من الرسم) .

مسائل

٤٦٨ – انشىء من النقطة A المستوي P الذي يقطع سطح الاسطوانة المائلة وفق المولدات ثم عين هذه المولدات (الشكل ٩٣٢) .

٤٦٩ – أنشىء من النقطة A المستوي P الموازي للمستقيم MN والقاطع لسطح الاسطوانة المائلة وفق المولدات ثم عين هذه المولدات (الشكل ٩٣٣) .

٤٧٠ – انشىء من المستقيم AB مستوياً يقطع سطح الاسطوانة المائلة وفق المولدات ثم عيّن هذه المولدات (الشكل ٩٣٤) .

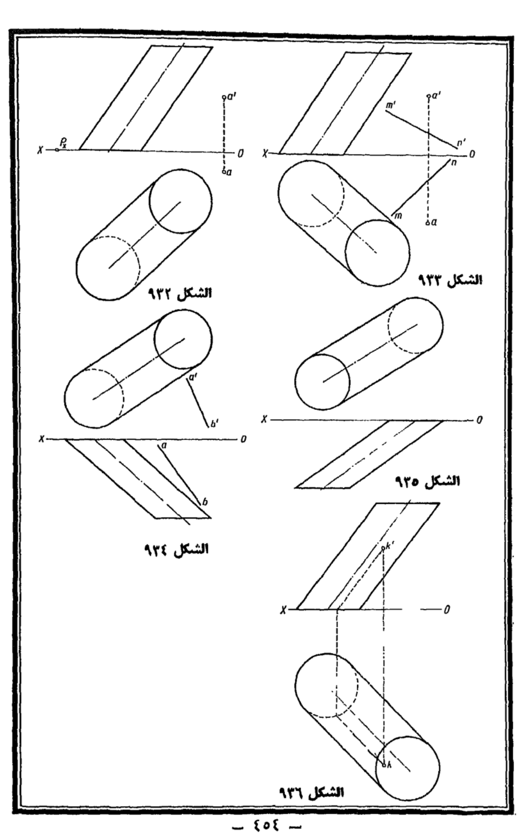
٤٧١ – أنشىء مستوياً اختيارياً P يقطع سطح الاسطوانة المائلة وفق المولدات ثم أوجد هذه المولدات (الشكل ٩٣٥) .

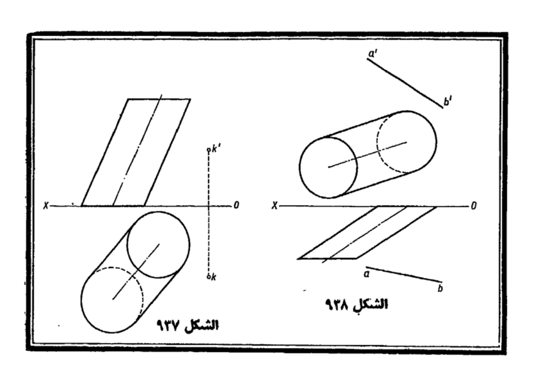
٤٧٢ – أنشىء آثار المستوي المماس لسطح الأسطوانة والمار من النقطة K الواقعة على سطحها (الشكل ٩٣٦) .

٤٧٣ – أنشىء آثار المستوي المماس لسطح الأسطوانة والمار من النقطة K (الشكل ٩٣٧) .

٤٧٤ – أنشىء آثار المستوي المماس لسطح الاسطوانة المائلة والموازي للمستقيم AB (الشكل ٩٣٨) .

٤٧٥ – أنشىء من النقطة A المستوي P الذي يقطع سطح المخروط وفق المولدات ثم أوجد هذه المولدات (الشكل ٩٣٩) .


X
P_x
a'
O
a
الشكل ٩٣٢
X
m'
a'
n'
O
n
m
a
الشكل ٩٣٣
a'
b'
X
a
O
b
الشكل ٩٣٤
X
O
الشكل ٩٣٥
k'
X
O
k
الشكل ٩٣٦



الشكل ٩٣٧

الشكل ٩٣٨

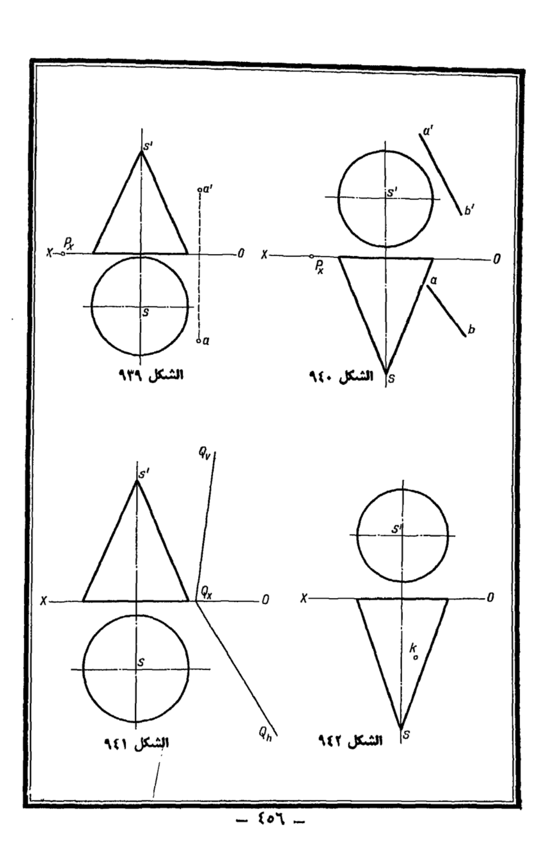
٤٧٦ ـ أنشىء المستوي P الذي يقطع سطح المخروط وفق المولدات ويوازي المستقيم AB ثم أوجد هذه المولدات (الشكل ٩٤٠) .

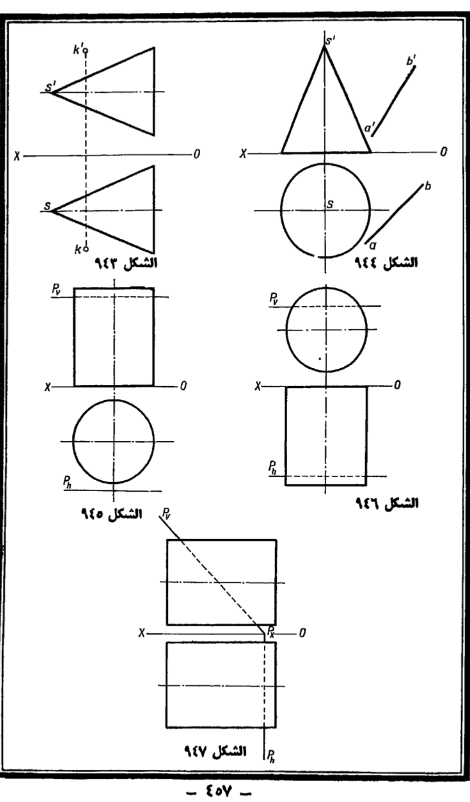
٤٧٧ ـ أنشىء المستوي P الذي يقطع سطح المخروط وفق المولدات ويوازي المستوي Q . أوجد هذه المولدات (الشكل ٩٤١) .

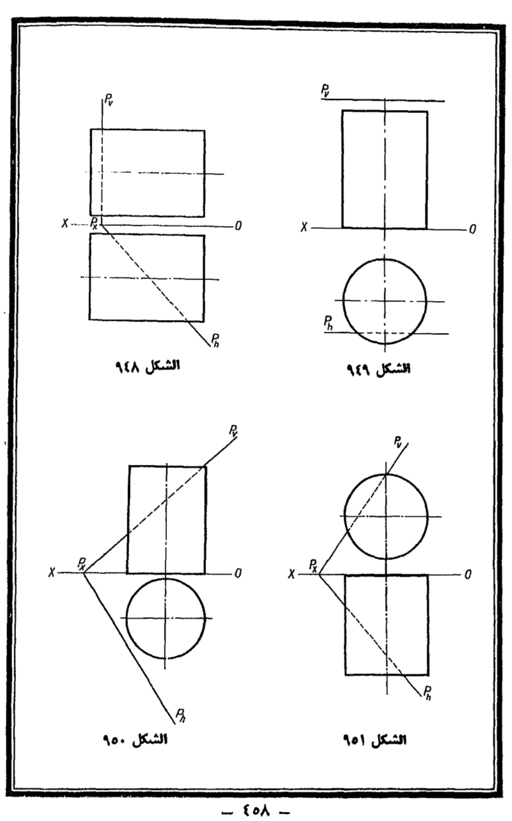
٤٧٨ ـ أنشىء آثار المستوي الذي يمس سطح المخروط ويمر من النقطة K الواقعة على سطحه (الشكل ٩٤٢) .

٤٧٩ ـ أنشىء من النقطة K مستوياً مماساً لسطح المخروط (الشكل ٩٤٣) .

٤٨٠ ـ أنشىء مستوياً موازياً للمستقيم AB ومماساً لسطح المخروط (الشكل ٩٤٤) .


s'
a'
X
P_x
O
s
a
الشكل ٩٣٩
a'
s'
b'
X
P_x
O
a
b
s
الشكل ٩٤٠
Q_v
s'
X
Q_x
O
s
Q_h
الشكل ٩٤١
s'
X
O
k
s
الشكل ٩٤٢


k'
s'
X
0
s
k
الشكل ٩٤٣
s'
b'
a'
X
0
b
s
a
الشكل ٩٤٤
Pv
X
0
Ph
الشكل ٩٤٥
Pv
X
0
Ph
الشكل ٩٤٦
Pv
X
Px
0
Ph
الشكل ٩٤٧

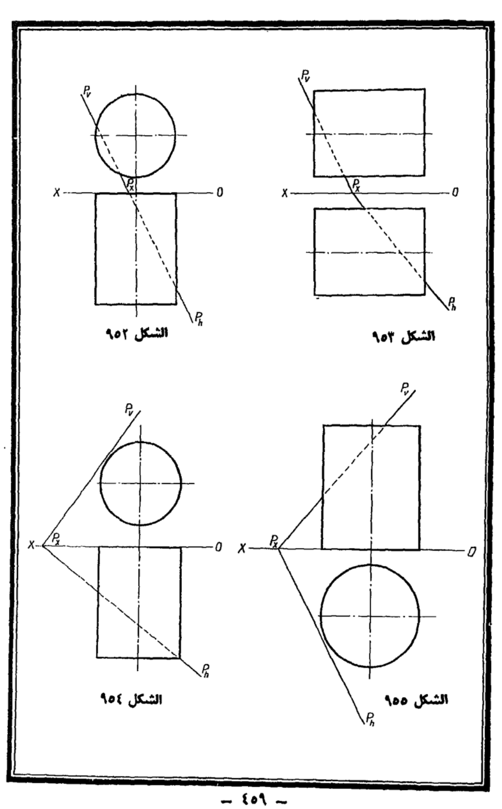


الشكل ٩٤٨

الشكل ٩٤٩

الشكل ٩٥٠

الشكل ٩٥١

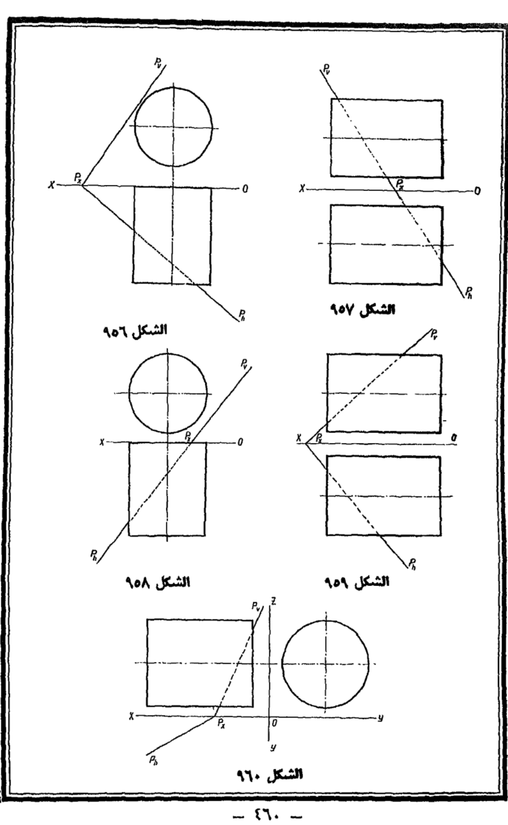


الشكل ٩٥٢

الشكل ٩٥٣

الشكل ٩٥٤

الشكل ٩٥٥



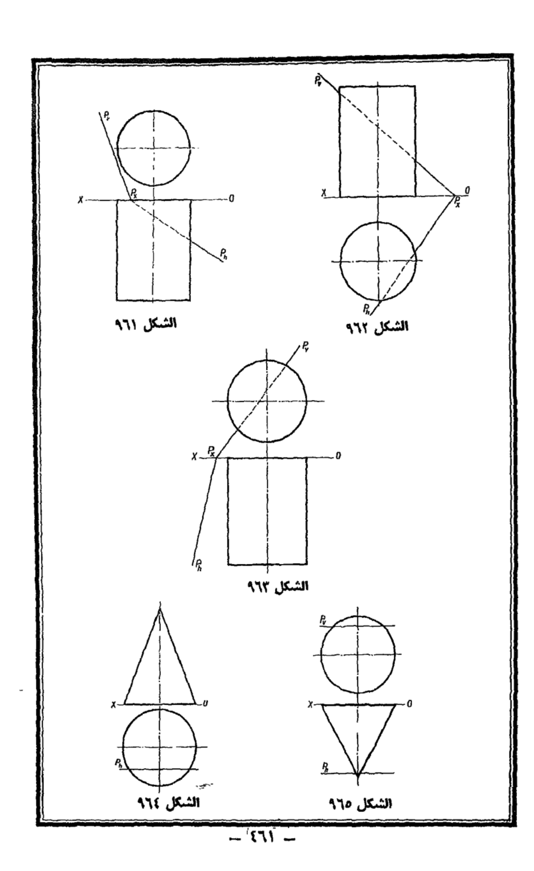
الشكل ٩٥٧

الشكل ٩٥٦

الشكل ٩٥٩

الشكل ٩٥٨

الشكل ٩٦٠



الشكل ٩٦١

الشكل ٩٦٢

الشكل ٩٦٣

الشكل ٩٦٤

الشكل ٩٦٥

٤٨١ – أنشىء مساقط مقطع اسطوانة دائرية قائمة بالمستوي P (الشكل ٩٤٥ – ٩٦٣) .

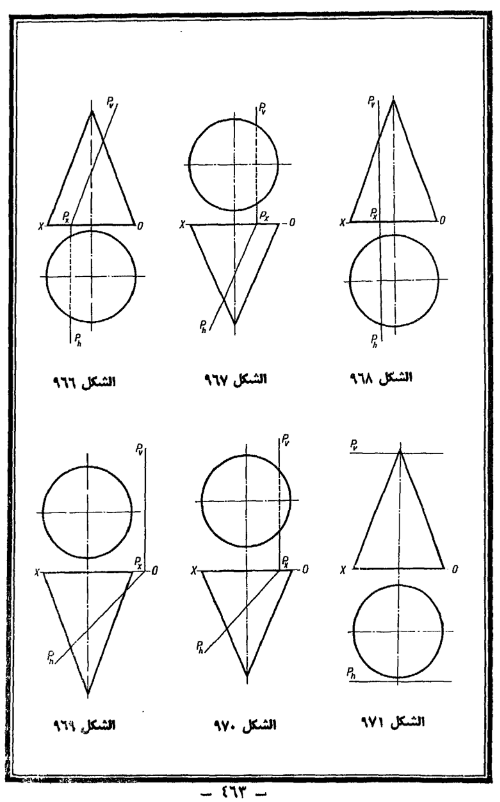
٤٨٢ – أنشىء مساقط مقطع مخروط دائري قائم بالمستوي P (الشكل ٩٦٤ – ٩٨٢) .

٤٨٣ – أنشىء مساقط مقطع كرة بالمستوي P (الشكل ٩٨٣) .

٤٨٤ – أنشىء آثار المستوي المماس لسطح الكرة والمار من المستقيم AB (الشكل ٩٨٤) .

٤٨٥ – أنشىء آثار المستوي المماس لسطح الكرة إذا علم المسقط الشاقولي لنقطة التماس (k′) (الشكل ٩٨٥)

٤٨٦ – أنشىء المستوي P الموازي للمستوي Q والمماس لسطح الكرة (الشكل ٩٨٦) .



الشكل ٩٦٦

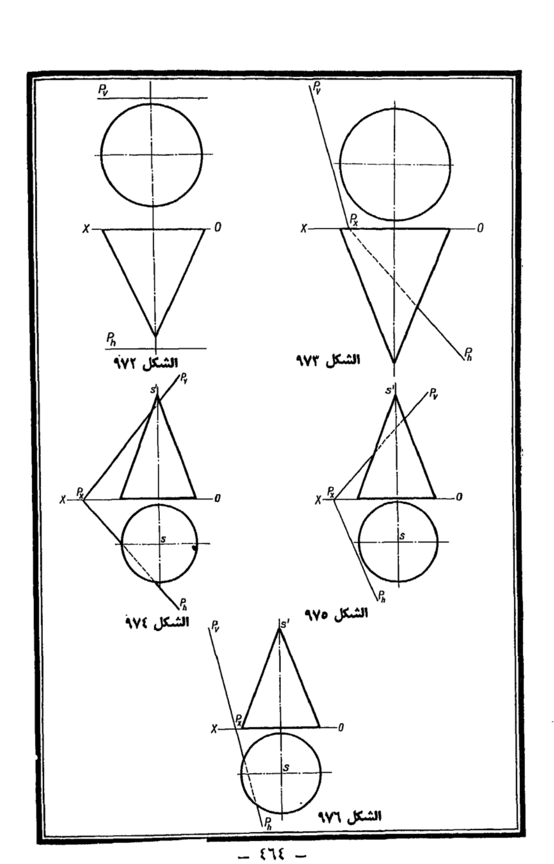
الشكل ٩٦٧

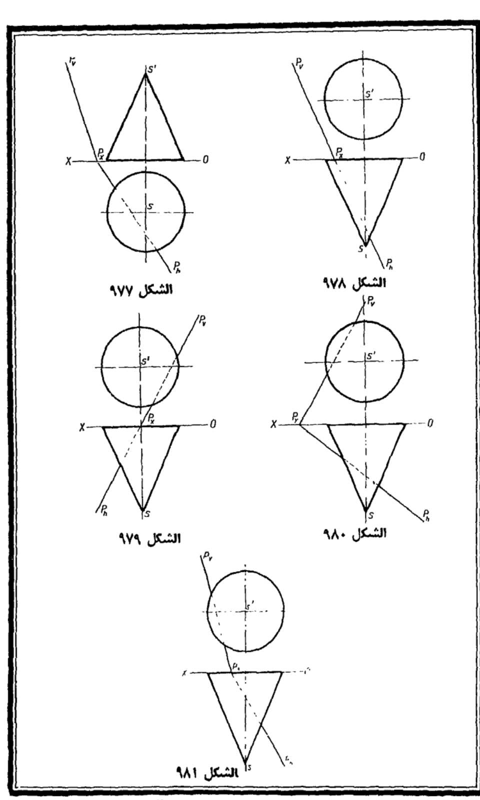
الشكل ٩٦٨

الشكل ٩٦٩

الشكل ٩٧٠

الشكل ٩٧١


P_v
X
0
P_h
الشكل ٩٧٢
P_v
P_x
X
0
P_h
الشكل ٩٧٣
s'
P_v
P_x
X
0
s
P_h
الشكل ٩٧٤
s'
P_v
P_x
X
0
s
P_h
الشكل ٩٧٥
P_v
s'
P_x
X
0
s
P_h
الشكل ٩٧٦



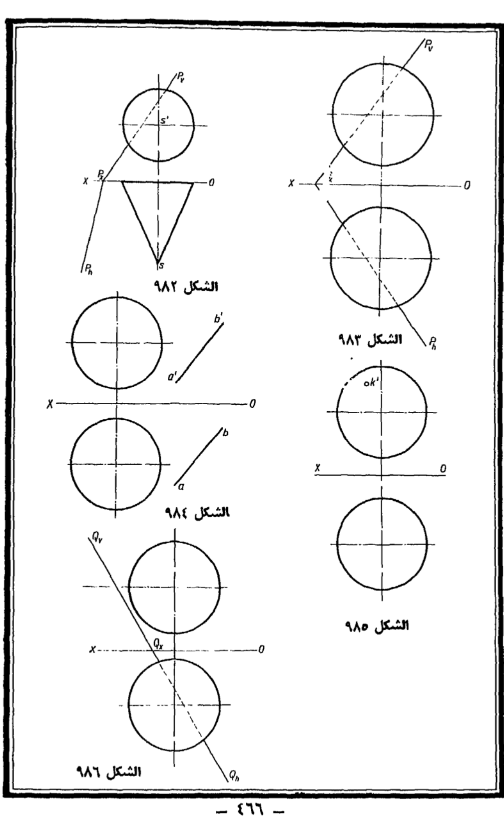
الشكل ٩٧٧

الشكل ٩٧٨

الشكل ٩٧٩

الشكل ٩٨٠

الشكل ٩٨١



P_v
s'
P_x
x
0
P_h
s
الشكل ٩٨٢
P_v
x
0
P_h
الشكل ٩٨٣
b'
a'
X
0
b
a
الشكل ٩٨٤
ok'
X
0
الشكل ٩٨٥
Q_v
Q_x
x
0
Q_h
الشكل ٩٨٦

البحث الرابع والعشرون

انفراد السطوح

أمثلـــة

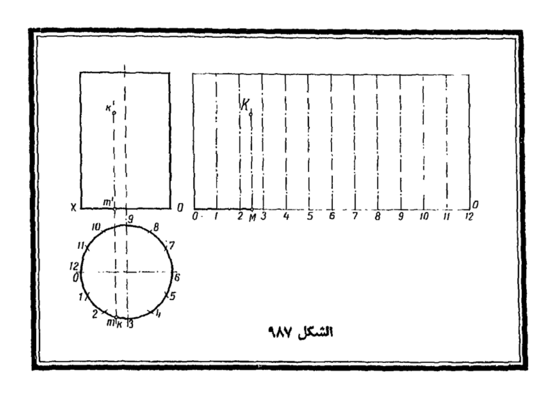
● **المثال ٣٠٩ :** ارسم انفراد السطح الجانبي لاسطوانة دائرية قائمة (الشكل ٩٨٧) .

الحل : إن انفراد السطح الجانبي لاسطوانة دائرية قائمة نصف قطر قاعدتها r وارتفاعها h هو مستطيل طول قاعدته $2\pi r$ وارتفاعـه h . حتى نتجنب الحسابات المتعلقة بتعيين طول محيط الدائرة يرسم عـادة في قاعدة الاسطوانة مضلع منتظم ذو اثني عشر ضلعاً (على الرسم نبين فقط الرؤوس ....0,1,2) ويعتبر محيطه مساوياً لطول قاعدة الاسطوانـــة . وهكذا انفراد السطح الجانبي لاسطوانة دائرية قائمة يستبدل بدقة كافية في الحياة العملية بانفراد السطح الجانبي لموشور منتظم قائم ذو اثني عشر وجهاً مرسوم داخل الاسطوانة المفروضة .

نبين كذلك كيف يمكن نقل النقطـة (k,k') من سطح الاسطوانـــة إلى الانفراد . نأخذ على قاعدة المستطيل القطعة OM المساوية لطول القوس om ثم نرفع من النقطة M عموداً نأخذ عليه القطعة MK المساوية لـ m'k' .

● **المثال ٣١٠ :** ارسم انفراد السطح الجانبي لاسطوانة دائرية قائمة مقطوعـــة (الشكل ٩٨٨) .

الحل : نقسم قاعدة الاسطوانة إلى ١٢ جزء متساو ونرسم من نقاط التقسيم هذه المولدات . نرسم على الجانب مستقيماً نأخذ عليه على التوالي من نقطـة اختيارية

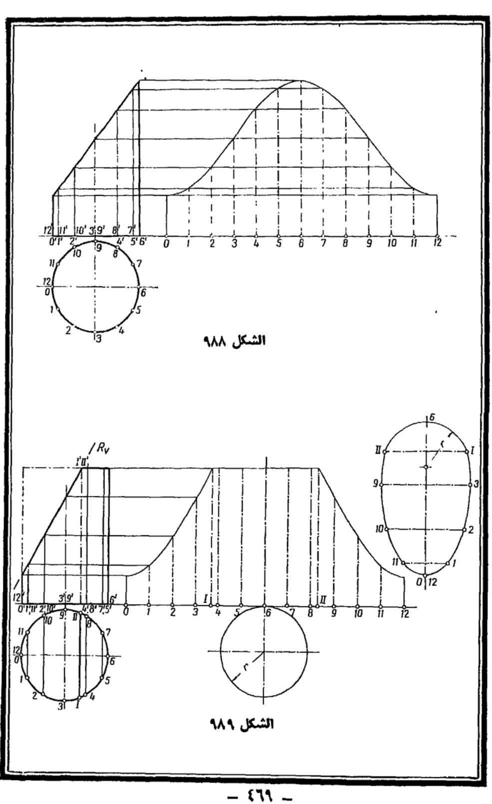


الشكل ٩٨٧

أضلاع المضلع الاثني عشري المنتظم المرسوم في قاعدة الاسطوانة . نرسم من النقاط 12 .... 0،1،2 أعمدة على المستقيم نأخذ عليها أطوال المولدات الموافقة . بوصل نهايات المولدات بخط انسيابي نجد انفراد السطح الجانبي للاسطوانة المقطوعة .

● **المثال ٣١١ :** ارسم الانفراد الكلي للجزء السفلي لاسطوانة دائرية قائمة مقطوعة بالمستوي R (الشكل ٩٨٩) .

الحل : نقسم قاعدة الاسطوانة إلى ١٢ جزء متساو ونرسم من نقاط التقسيم هذه المولدات . من الرسم يتضح أن مولدات الاسطوانة تقطع المستوي R على المجال



الشكل ٩٨٨

الشكل ٩٨٩

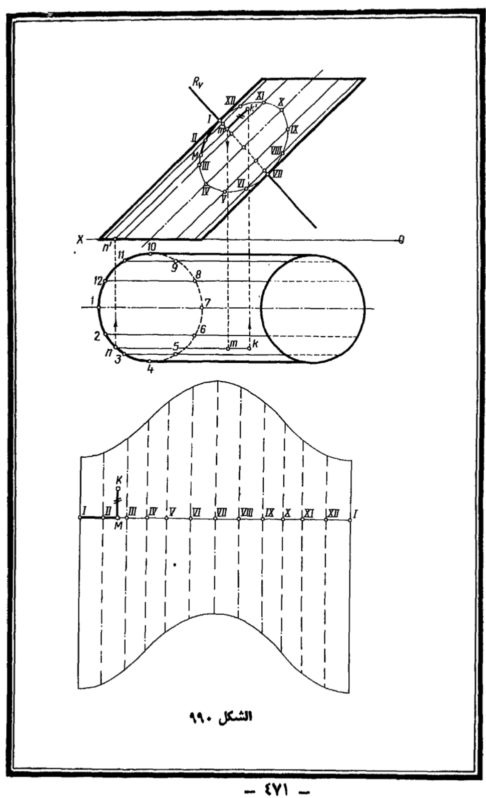
I o II . نرسم على الجانب مستقيماً ونأخذ عليه على التابع من نقطة اختيارية o قطعاً متساوية .... ،01،12 وقطعتين متساويتين II 12 و oI . نرسم من النقاط II، I، 12،...، 1، 0 أعمدة على المستقيم نأخذ عليها أطوال المولدات الموافقة . بوصل نهايات المولدات المتوضعة على المجال II – I بخط مستقيم وعلى المجال الآخر بخط انسيابي نجد انفراد السطح الجانبي للاسطوانة المقطوعة .

للحصول على الانفراد الكلي علينا أن نضيف إلى السطح الجانبي للأسطوانة : القاعدة السفلية وهي بشكل دائرة ، الجزء الأول من القاعدة العلوية بشكل قطاع دائري والجزء الآخر من القاعدة العلوية بشكل جزء من قطع ناقص يلزم تعيين قيمته الحقيقية أولاً (انظر الرسم) .

ملاحظة : إذا كان المستوي القاطع عاماً فانه من المفضل تدوير المجموعة حول محور الاسطوانة بزاوية مناسبة φ حتى الوضعية التي يصبح فيها المستوي مسقطاً .

● **المثال ٣١٢ :** ارسم انفراد السطح الجانبي لاسطوانة مائلة ذات قاعدة دائرية (الشكل ٩٩٠) .

الحل : انفراد السطح الجانبي لا سطوانة مائلة يتم كانفراد موشور مائل (انظر المثال ٢٧١) . نرسم مستوياً مساعداً R عمودياً على محور الاسطوانة ونقسم بذلك الاسطوانة إلى اسطوانتين قائمتين ذات قاعدة مشتركة . نعين القيمة الحقيقية للمقطع العمودي (الناظمي). نقسم قاعدة الاسطوانة إلى ١٢ جزء متساو . من نقاط التقسيم هذه نرسم المولدات التي تقسم محيط المقطع الناظمي للإسطوانة إلى ١٢ جزء غير متساو ....، III – II، II – I .
نرمم على الجانب مستقيماً نأخذ عليه من نقطة اختيارية القطع ....، III – II ، II – I المساوية لأضلاع المضلع I ... III، II، I المرسوم داخل محيط المقطع


Rv
XII
XI
X
k'
I
m'
IX
II
VIII
M
III
VII
VI
IV
V
X
n'
10
0
11
9
8
12
1
7
2
6
5
m
k
n
3
4
K
I
II
III
IV
V
VI
VII
VIII
IX
X
XI
XII
I
M

الشكل ٩٩٠

الناظمي . نرسم من النقاط الناتجة I ، II ، III... I أعمدة على المستقيم I – I وعلى كل منها نأخذ أطوال المولدات للجزء العلوي والسفلي من الاسطوانة المعطاة بأطوالها الحقيقية (لماذا ؟). بوصل نهايات المولدات بخط انسيابي نحصل على انفراد السطح الجانبي للاسطوانة المائلة.

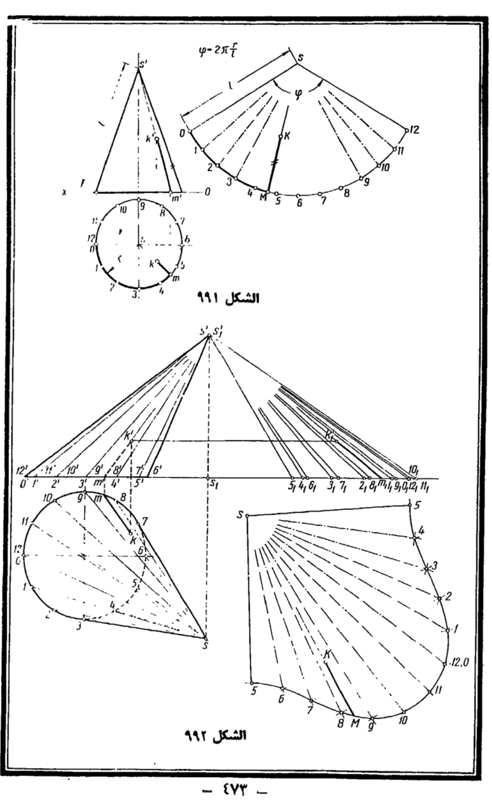
نبين كذلك كيف يمكن نقل نقطة ما K واقعة على سطح الاسطوانة إلى الانفراد بمعرفة المسقط الأفقي (k) لهذه النقطة . نرسم من النقطة k المسقط الأفقي (k n) لمولد مساعد ثم نعين على مسقطه الشاقولي بدلالة النقطة k النقطة k′ . ننقل النقطة (m ، m′) من المولد (kn ،k′n′) الواقعة على محيط المقطع الناظمي إلى الانفراد ومن النقطة M ننشىء عموداً على المستقيم I – I وعليه نأخذ الى الأعلى القطعة MK = m′k′ .

ملاحظة : إذا لم يكن محور الاسطوانة موازياً لأحد مستويات الاسقاط فإننا مسبقاً نوضع الاسطوانة بحيث يصبح محورها موازياً للمستوي H أو V (لماذا ؟) .

● **المثال ٣١٣ :** ارسم انفراد السطح الجانبي لمخروط دائري قائم (الشكل ٩٩١).

الحل : إن انفراد السطح الجانبي لمخروط دائري قائم نصف قطر قاعدته r وطول مولده l هو قطاع دائري نصف قطره l وزاويته المركزية $\varphi = \frac{2\pi r}{l}$.

لكي نتجنب الحسابات المتعلقة بتعيين طول قوس القطاع أو الزاوية φ عادة نرسم في قاعدة المخروط مضلعاً منتظماً إثني عشرياً (على الرسم نبين فقط رؤوسه ...0،1،2) ومن ثم من نقطة اختيارية ما S نرسم قوساً نصف قطره l ونعين على التوالي من إحدى نقاطه اثني عشر قوساً أوتارها تساوي أضلاع المضلع الاثني عشري . وهكذا انفراد السطح الجانبي لمخروط دائري قائم يستبدل



الشكل ٩٩١

الشكل ٩٩٢

بدقة كافية في الحياة العملية بانفراد هرم منتظم اثنى عشري مرسوم داخل ذلك المخروط .

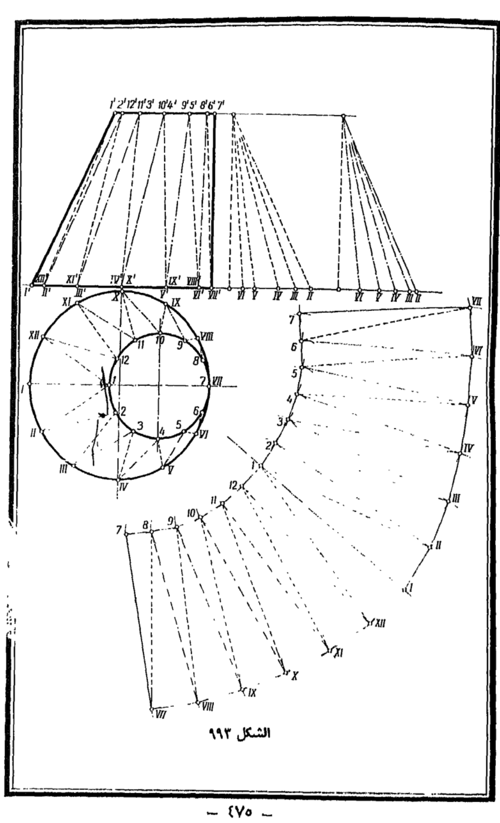
نبين كذلك كيف يمكن نقل نقطة ما K واقعة على سطح المخروط إلى الانفراد بمعرفة مسقطها الافقي (k) . نرسم من النقطة k المسقط الأفقي (sm) لمولد مساعد ونعين مسقطه الشاقولي (s′m′) ثم بدلالة النقطة k نجد النقطة k′ على المستقيم s′m′ . نعين المولد SM على الانفراد وعليه نأخذ الطول الحقيقي للقطعة (sk ، s′k′) من المولد .

● **المثال ٣١٤ :** ارسم انفراد السطح الجانبي لمخروط مائل ذي قاعدة دائرية (الشكل ٩٩٢) .

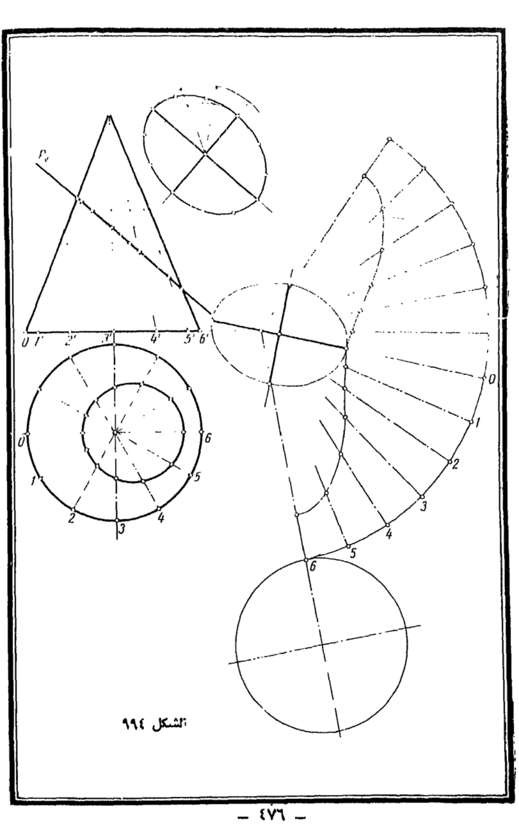
الحل : نقسم قاعدة المخروط إلى اثني عشر جزء متساو وننشيء من نقاط التقسيم المولدات . وهكذا نقسم السطح الجانبي للمخروط إلى اثني عشر مثلث منحن يمكن بدقة كافية للحياة العملية استبدالها بمثلثات مستوية ، إذن نستبدل السطح الجانبي للمخروط بالسطح الجانبي لهرم اثنى عشري مرسوم في هذا المخروط نعين القيم الحقيقية لجميع مولدات المخروط (انظر الرسم) وننشيء على التوالي المثلثات المستوية S 01 ، S 12،.... . بوصل نهايات المولدات بخط انسيابي نحصل على انفراد السطح الجانبي للمخروط المائل . بالإضافة إلى ذلك نبين على الرسم طريقة نقل نقطة اختيارية K من سطح المخروط إلى الانفراد .

● **المثال ٣١٥ :** ارسم انفراد السطح الجانبي لجذع مخروط مائل دون استخدام ذروته (الشكل ٩٩٣)

الحل : نقسم القاعدة العلوية والسفلية إلى إثني عشر جزء متساو ونصل بمستقيمات (مولدات) النقاط I – 1 ، II – 2 ،.... أي نرسم داخل جذع المخروط جذع هرم



الشكل ٩٩٣



الشكل ٩٩٤

اثني عشري . باستبدال كل شبه منحوف منحني بشبه منحوف مستوي نقسمها إلى مثلثات ونعين القيم الحقيقية لجميع المولدات والأقطار (انظر الرسم) . ننشىء على التوالي المثلثات ...,I II I, 1 II 1 2 وبوصل نهايات المولدات ... ,I,II, III و ...1,2,3 بخطوط انسيابية نجد بدقة كافية انفراد السطح الجانبي لجذع المخروط .

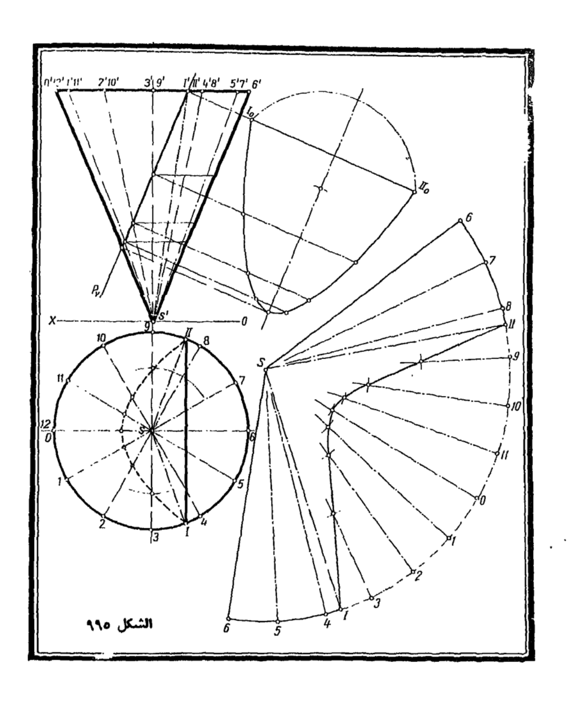
● **المثال ٣١٦ :** ارسم انفراد الجزء السفلي لمخروط دائري قائم مقطوع بالمستوي P (الشكل ٩٩٤) .

الحل : نقسم قاعدة المخروط إلى اثني عشر جزء متساو ونرسم من نقاط التقسيم المولدات ونعين نقاط تقاطعها مع المستوي P . نرسم انفراد المخروط بأكمله (انظر المثال ٣١٣) ثم نأخذ على كل مولد القيمة الحقيقية لطول القطعة الموافقة لمولد المخروط من ذروته حتى نقطة تقاطعه مع المستوي ثم نصل نهايات هذه القطـــع بخط انسيابي . للحصول على الانفراد الكلي للجزء السفلي من المخروط علينا أن نضيف إلى انفراد السطح الجانبي القاعدة التي هي بشكل دائرة والمقطع الذي هو بشكل قطع ناقص الذي نعين مسبقاً قيمته الحقيقية (انظر الرسم) .

ملاحظة : إذا كان المستوي القاطع ذو وضعية عامة فإنه من الأنسب تدوير المجموعة بأكملها حول محور المخروط بزاوية مناسبة φ حتى يصبح المستوي القاطع مُسقطاً .

● **المثال ٣١٧ :** ارسم الانفراد الكلي للجزء السفلي لمخروط دائري قائم مقطوع بالمستوي P (الشكل ٩٩٥) .

الحل : نقسم قاعدة المخروط إلى إثني عشر جزء متساو وننشىء من نقاط التقسيم المولدات . من الإنشاء يتضح أنه على مجال القوس I 0 II فقط تتقاطع المولدات مع المستوي P . نرسم انفراد المخروط بأكمله ونرسم عليه المولدات الإضافية S I, S .



الشكل ٩٩٥

على كل مولد قاطع للمستوي P نأخذ القيمة الحقيقية لطول القطعة الموافقة لمولد المخروط من ذروته حتى نقطة تقاطعه مع المستوي . ثم نصل نهايات القطع بخط

انسيابي . للحصول على الانفراد الكلي للجزء السفلي للمخروط علينا أن نضيف إلى انفراد السطح الجانبي : جزء القاعدة – قطاع دائري والمقطع الذي هو بشكل قطع مكافىء بعد أن نعين مسبقاً قيمته الحقيقية (انظر الرسم) .

مسائل

٤٨٧ – اقطع الاسطوانة الدائرية القائمة بالمستوي P وارسم الانفراد الكلي لأحد جزئيها (الشكل ٩٤٥ – ٩٦٣) .

٤٨٨ – اقطع المخروط الدائري القائم بستو وارسم الانفراد الكلي لأحد جزئيه (الشكل ٩٦٤ – ٩٨٢) .

البحث الخامس والعشرون

تقاطع مستقيم مع سطح

لتعيين نقطة تقاطع مستقيم مع سطح جسم ما (موشور ، هرم ، اسطوانة ، مخروط ، كرة إلخ) نلجأ إلى طريقة مماثلة كما في تعيين نقطة تقاطع مستقيم مع مستوي أي :

١ ـ نضم المستقيم المفروض في مستوي مساعد .

٢ ـ نعين خط (مستقيم أو خط منحني) تقاطع السطح المفروض مع المستوي المساعد .

٣ ـ في مكان تقاطع المستقيم المفروض مع خط التقاطع نجد النقاط المنشودة .

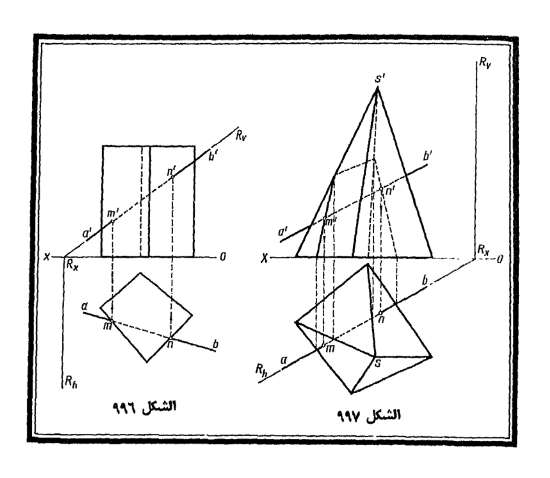
في الحالة الخاصة يمكن أن يكون المستقيم مماساً للسطح .

ملاحظة : عند ضم المستقيم في مستوي مساعد نختار هذا المستوي بحيث تكون مساقط خط تقاطعه مع السطح على مستويات الإسقاط بشكل خطوط بسيطة ـ مستقيم أو دائرة .

أمثلة

● **المثال ٣١٨ :** أوجد نقاط تقاطع سطح الموشور مع المستقيم AB (الشكل ٩٩٦) .

الحل : نضم المستقيم AB في مستوي أمامي (أو شاقولي) R فيقطع سطح الموشور



الشكل ٩٩٦

الشكل ٩٩٧

وفق مضلع رباعي . مكان تقاطع المساقط الأفقية للمضلع الحاصل والمستقيم المفروض نجد المساقط الأفقية (n) ، (m) للنقاط المنشودة . بمعرفتها نجد المساقط الشاقوليـــة (n′) ، (m′) على المستقيم a′b′ . في هذه الحالة يمكن تعيين النقاط المطلوبة دون الاستعانة بالمستوي R (لماذا) ؟

● **المثال ٣١٩ :** أوجد نقاط تقاطع سطح الهرم مع المستقيم AB (الشكل ٩٩٧) .

الحل : نضم المستقيم AB في مستوي شاقولي R يقطع سطح الهرم وفق مضلع

رباعي . مكان تقاطع المساقط الشاقولية للمضلع الناتج والمستقيم المفروض نجد المساقط الشاقولية ('n) ، ('m) للنقاط المنشودة . بمعرفتها نجد المساقط الأفقية (n) ، (m) على المستقيم ab .

● **المثال ٣٢٠ :** أوجد نقاط تقاطع المستقيم AB مع سطح الهرم (الشكل ٩٩٨) .

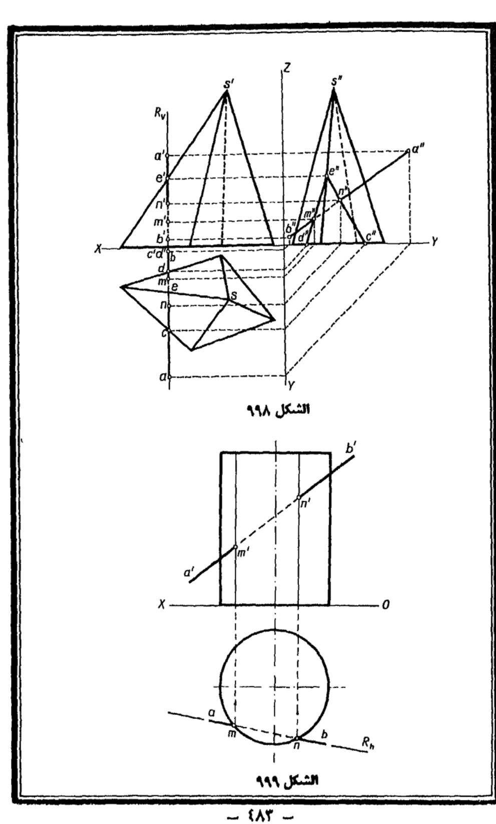
الحل : نضم المستقيم AB في مستوي جنبي R فيقطع سطح الهرم وفق المثلث CDE . مكان تقاطع المساقط الجنبية للمثلث الناتج والمستقيم المفروض نجد المساقط الجنبية ("n) ، ("m) للنقاط المنشودة . بمعرفتها نجد النقاط m ، n على المستقيم ab والنقاط 'm' ، n على المستقيم 'a'b .

● **المثال ٣٢١ :** أوجد نقاط تقاطع المستقيم AB مع سطح الاسطوانة (الشكل ٩٩٩) .

الحل : نضم المستقيم AB في مستوي شاقولي R فيقطع سطح الاسطوانة وفق مولدين . مكان تقاطع المساقط الشاقولية لهذه المولدات والمستقيم المفروض نجد المساقط الشاقولية ('n) ، ('m) للنقاط المنشودة . بمعرفة النقاط 'm' ، n نعين m ، n على المستقيم ab . (يمكن ضم المستقيم AB في مستوي أمامي) .

● **المثال ٣٢٢ :** أوجد نقاط تقاطع المستقيم AB مع سطح الاسطوانة المائلة (الشكل ١٠٠٠) .

الحل : نضم المستقيم AB في المستوي R الموازي لمحور الاسطوانة . لهذا نأخذ على المستقيم (ab ، 'a'b) نقطة اختيارية (c ، 'c) ونرسم منها المستقيم (cd ، 'c'd) الموازي لمحور الاسطوانة . هذا المستوي المعين بمستقيمين متقاطعين يقطع سطح الاسطوانة بمولدين . نعين الآثار الأفقية $(h_1,h'_1),(h,h')$ للمستقيمين



الشكل ٩٩٨

الشكل ٩٩٩

(ab,a′b′),(cd,c′d′) ونرسم من النقطتين h,h_1 الأثر الأفقي (R_h) للمستوي [الأثر الشاقولي للمستوي غير ضروري لحل المسألة (لماذا ؟)] . المستوي R يقطع قاعدة الاسطوانة وفق الوتر (12,1′2′) . من النقطتين (1,1′),(2,2′) نرسم مولدات الاسطوانة . مكان تقاطع المساقط الشاقولية لهذه المولدات مع المسقط الشاقولي (a′b′) للمستقيم المفروض نجد المساقط الشاقولية (m′),(n′) للنقاط المنشودة . بمعرفة النقطتين m′, n′ نجد النقطتين m,n على المستقيم ab .

[ضم المستقيم AB في مستوي شاقولي أو أمامي يعقد حل المسألة (لماذا ؟)] .

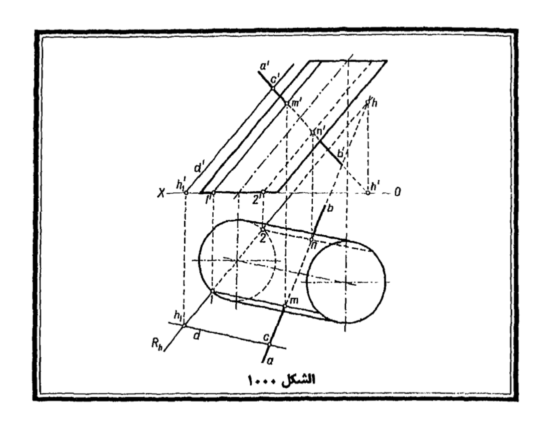
ملاحظة : في الحالة الخاصة (متى ؟) من الأفضل أخذ المستوي المساعد المار من المستقيم AB بشكل مستقيمين موازيين لمحور الاسطوانة .

● **المثال ٣٢٣ :** أوجد نقاط تقاطع المستقيم AB مع سطح المخروط (الشكل١٠٠١) .

الحل : يقطع المستقيم المفروض السطح الجانبي للمخروط في نقطة وحيدة (m,m′) . نضم المستقيم AB في مستوي أمامي R مار من ذروة المخروط S فيقطع هذا المستوي سطح المخروط وفق مستقيمين مولدين (على الرسم نبين مولداً واحداً) . مكان تقاطع المساقط الأفقية للمستقيمات الحاصلة والمستقيم المفروض نجد المسقط الأفقي (m) للنقطة المنشودة . بمعرفة هذه النقطة m نعين النقطة m′ الواقعة على المسقط الشاقولي (a′b′) للمستقيم المفروض (لماذا ؟)

● **المثال ٣٢٤ :** أوجد نقاط تقاطع المستقيم AB مع سطح المخروط (الشكل١٠٠٢) .

الحل : نضم المستقيم AB في المستوي R الموازي للمستوي H فيقطع سطح المخروط وفق دائرة . مكان تقاطع المساقط الأفقية للدائرة والمستقيم المفروض نجد المساقط الأفقية (m),(n) للنقاط المنشودة . بمعرفة m , n نجد النقطتين m′, n′

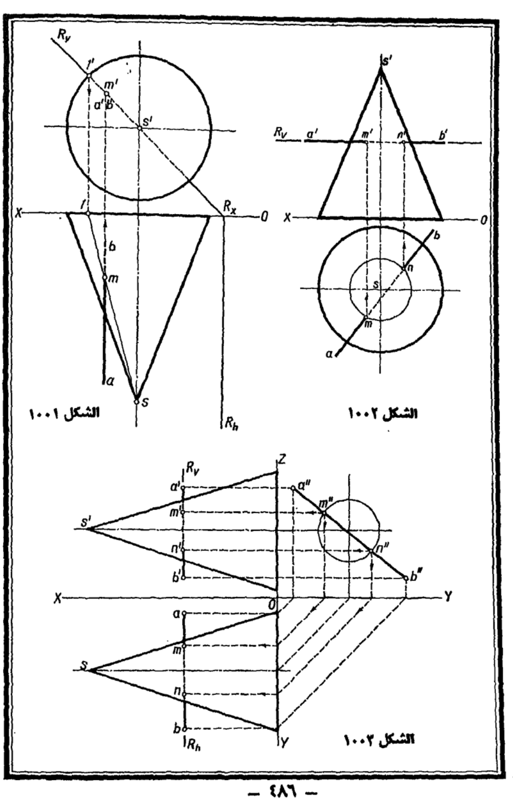


الشكل ١٠٠٠

على المستقيم a'b' . يمكن أن نضم المستقيم AB في مستوي شاقولي إلا أن هذا يُعقّد حل المسألة (لماذا ؟) .

● المثال ٣٢٥ : أوجد نقاط تقاطع المستقيم AB مع سطح المخروط (الشكل١٠٠٣) .

الحل : نضم المستقيم AB فيمستوي جنبي R فيقطع سطحالمخروط وفقدائرة . مكان تقاطع المساقط الجنبية للدائرة الناتجة والمستقيم المفروض نجد المساقط الجنبية (m''),(n'') للنقاط المنشودة وبمعرفتها نجد مساقطها الأفقية والشاقولية على مساقط المستقيم الموافقة (ab , a'b') .



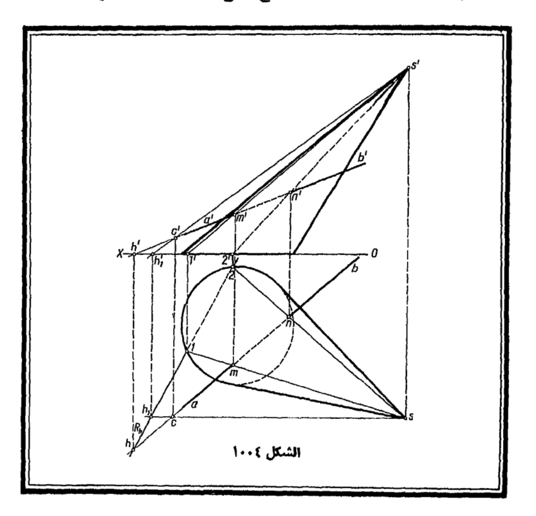
الشكل ١٠٠١

الشكل ١٠٠٢

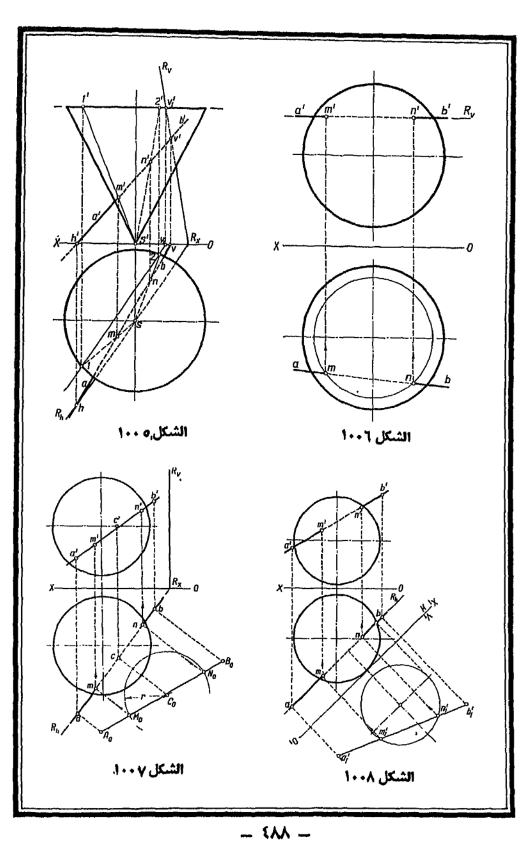
الشكل ١٠٠٣

● **المثال ٣٢٥ :** أوجـــد نقاط تقاطع المستقيم AB مع سطح المخروط المائل (الشكل ١٠٠٤) .

الحل : نضم المستقيم AB في المستوي R المار من ذروة المخروط . هذا المستوي (المستقيم المفروض AB والنقطة S) يقطع سطح المخروط وفق مستقيمين مولدين .



الشكل ١٠٠٤



الشكل ١٠٠٥

الشكل ١٠٠٦

الشكل ١٠٠٧

الشكل ١٠٠٨

لتعيين هذين المولدين نقوم بما يلي : نعين المستوي المفروض بالمستقيم AB والنقطة S بستقيمين متقاطعين AB ، SC (النقطة C اختيارية على المستقيم AB) . نعــين الآثار الأفقيـــة (h_1 ، h'_1) و (h ، h') للمستقيمات (ab,a'b') و (sc ، s'c') ونمرر من النقطتين h, h_1 الأثر الأفقي (R_h) للمستوي [الأثر الشاقولي للمستوي لايلزم لحل هذه المسألة (لمـــاذا ؟)] . يقطع المستوي R قاعدة المخروط وفق الوتر (1 2،1'2') كما يقطع سطح المخروط وفق المستقيمين المولدين (s2، s'2') و (s1،s'1') . مكان تقاطع المساقط الشاقولية لهذه المولدات مع المسقط الشاقولي (a'b') للمستقيم المفروض نجد المساقط الشاقولية (n')،(m') للنقاط المنشودة وبمعرفتها نجد النقطتين m,n على المستقيم ab .

[إن ضم المستقيم AB في مستوي شاقولي أو أمامي يعقد حل المسألة (لماذا؟)].

ملاحظة : في الحالة الخاصة (متى ؟) من الأفضل اعطاء المستوي المساعد المار من المستقيم AB والنقطة S بستقيمين متقاطعين في النقطة S .

● **المثال ٣٢٧ :** أوجد نقاط تقاطع المستقيم AB مع سطح المخروط (الشكل ١٠٠٥) .

الحل : نضم المستقيم AB في المستوي R المـــار من ذروة المخروط S . نعــين آثار المستقيم (ab ،a'b') (h , h'),(v,v') ونرسم آثار **المستوي** : الأفقي (R_h) ـ من النقطتين h،s والشاقولي (R_v) من النقطتين R_x ،v' . نعين خـط تقاطع المستوي R مع مستوي قاعدة المخروط . **المستوي** R يقطع قاعدة المخروط وفق الوتر (12,1'2') وسطحه وفق المولدات (s2 ، s'2') و (s1 , s'1') . مكان تقاطع المساقط الشاقولية لهذه المولدات والمسقط الشاقولي (a'b') للمستقيم المفروض

نجد المساقط الشاقولية (n') و (m') للنقاط المنشودة . بمعرفة m', n' نعــين النقطتين m, n على المستقيم ab .

● **المثال ٣٢٨ :** أوجد نقاط تقـاطع المستقيم AB مع سطح الكرة (الشكل ١٠٠٦) .

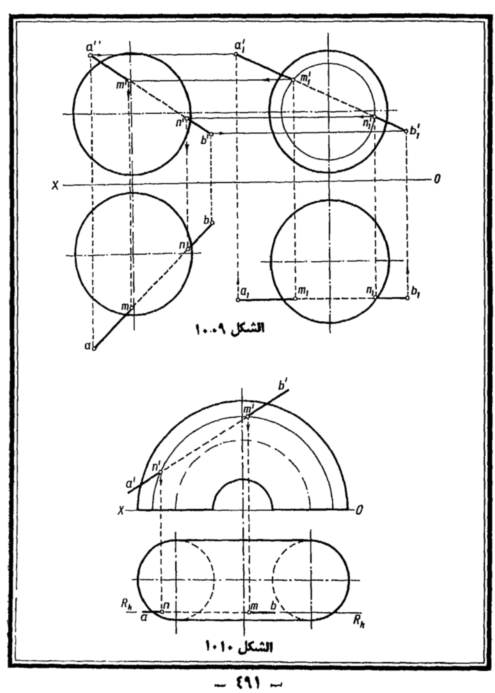
الحل : نضم المستقيم AB في المستوي R الموازي للمستوي H فيقطع سطح الكرة وفق دائرة . مكان تقاطع المساقط الأفقية للدائرة الحاصلة والمستقيم المفروض نجد المساقط الأفقية (m),(n) للنقاط المنشودة وبمعرفتها نجد النقطتين m', n' على المستقيم $a'b'$.

● **المثال ٣٢٩ :** أوجد نقاط تقاطع المستقيم AB مع سطح الكرة .

الحل : الطريقة الأولى (الشكل ١٠٠٧) . نضم المستقيم AB في المستوي الشاقولي R فيقطع سطح الكرة وفق دائرة نصف قطرها r ومركزها في النقطة (c, c') .

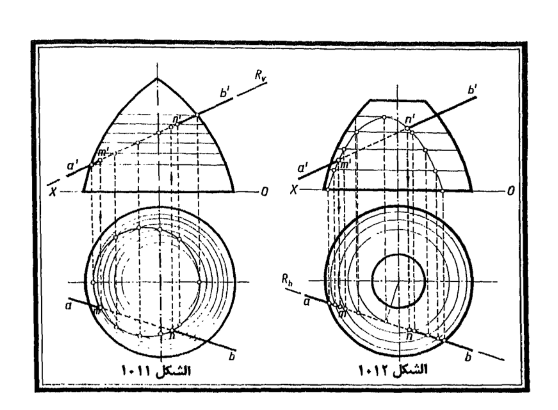
حتى نتجنب رسم المسقط الشاقولي لخط التقاطع الذي هو بشكل قطع ناقص نطبق المستوي R على المستوي H ونعين في هذه الوضعية الدائرة والمستقيم المفروض ومكان تقاطعها نجد النقطتين M_0, N_0 ومنها نجد النقاط المنشودة (n, n'),(m, m').

٢ ـ طريقة تبديل مستويات الاسقاط (الشكل ١٠٠٨) . نستبدل مثــلاً مستوي الاسقاط الشاقولي بستو جديد (V_1) يوازي المستقيم المفروض . نضم المستقيم ($ab, a_1'b_1'$) في المستوي R الموازي للمستوي V_1 فيقطع الكرة وفق دائرة . مكان تقاطع المساقط الشاقوليـة للمستقيم والدائرة نجد النقطتين m_1', n_1' ومنها نجد النقاط المنشودة (n, n') و (m, m') .



الشكل ١٠،٠٩

الشكل ١٠،١٠



الشكل ١٠١١

الشكل ١٠١٢

٣ ــ طريقة الانتقال (الشكل ١٠٠٩) . ننقل المجموعة المفروضة بصورة موازية مثلاً لمستوي الاسقاط الأفقي حتى يصبح المستقيم المفروض موازياً للمستوي V . نضم المستقيم ($a_1b_1,a'_1b'_1$) في المستوي R الموازي للمستوي V فيقطع سطح الكرة وفق دائرة . مكان تقاطع المساقط الشاقولية للدائرة والمستقيم نجد النقطتين m'_1,n'_1 ومنها بإنشاء عكسي نعين النقاط m',n' على المستقيم $a'b'$ وبالتالي m,n على المستقيم ab . النقاط $(m,m'),(n,n')$ هي النقاط المنشودة .

● **المثال ٣٣٠ :** أوجد نقاط تقاطع المستقيم AB مع سطح الحلقة (الشكل ١٠١٠) .

الحل : نضم المستقيم AB في المستوي R الموازي للمستوي V فيقطع سطح الحلقة وفق دائرة . مكان تقاطع المساقط الشاقولية للدائرة والمستقيم المفروض نجد

المساقط الشاقولية $(n'),(m')$ للنقاط المنشودة وبمعرفتها نجد المساقط الأفقية m،n على المستقيم ab .

(يمكن أن نضم المستقيم AB في مستوي أمامي إلا أن هذا يعقّد كثيراً حل المسألة) .

● **المثال ٣٣١ :** أوجد نقاط تقاطع المستقيم AB مع السطح الدوراني المفروض (الشكل ١٠١١) .

الحل : نضم المستقيم AB في مستوي أمامي R ونعين مساقط خط التقاطع . مكان تقاطع المساقط الأفقية لهذا الخط والمستقيم المفروض نجد النقاط m,n ومنها m', n' على المستقيم $a'b'$.

على الشكل ١٠١٢ نبين حل المسألة بضم المستقيم في مستوي شاقولي R .

● **المثال ٣٣٢ :** لدينا النقطة S والمستقيم AB . أنشىء من النقطة S المستقيمات التي تميل على المستوي H بزاوية مفروضة φ وتقطع المستقيم AB (الشكل ١٠١٣) .

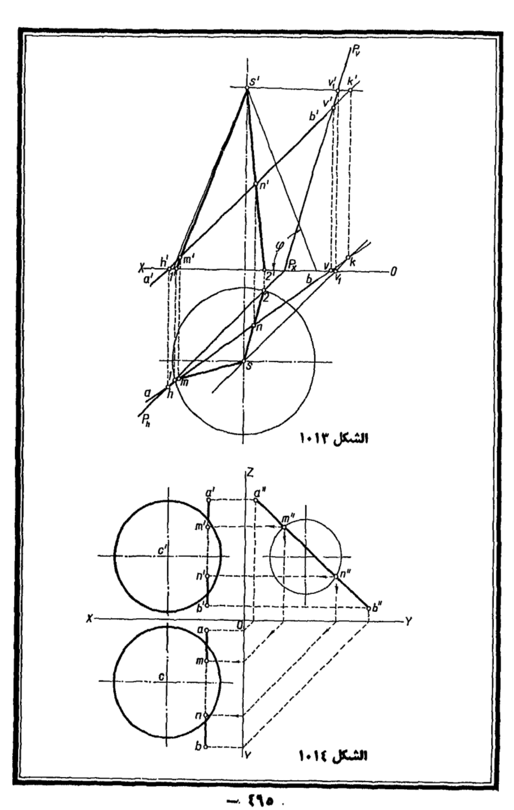
الحل : المحل الهندسي في الفراغ للمستقيمات التي تمر من النقطة S وتميل على المستوي H بزاوية مفروضة φ هو سطح مخروطي دائري قائم ذروته في النقطة S ومولداته تشكل مع المستوي H نفس الزاوية φ . المستقيمات المنشودة هي مولدات المخروط التي تمر من النقاط $(m,m'),(n,n')$ تقاطع سطح المخروط مع المستقيم المفروض (الإنشاء واضح من الرسم) .

● **المثال ٣٣٣ :** لدينا النقطة C والمستقيم AB . عين على المستقيم AB النقاط التي تبعد عن النقطة C مسافة قدرها 15 mm (الشكل ١٠١٤) .

الحل : المحل الهندسي في الفراغ للنقاط التي تبعد عن النقطة C مسافة 15 mm هو سطح كرة نصف قطرها 15 mm ومركزها في النقطة C . النقاط المنشودة هي النقاط (n,n') ,(m,m') تقاطع سطح الكرة مع المستقيم المفروض (الإنشاء واضح من الرسم) .

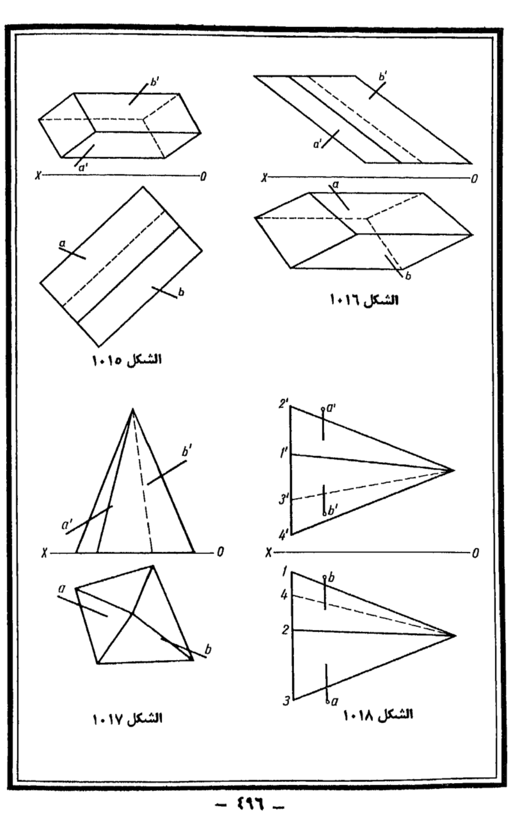
مسائل

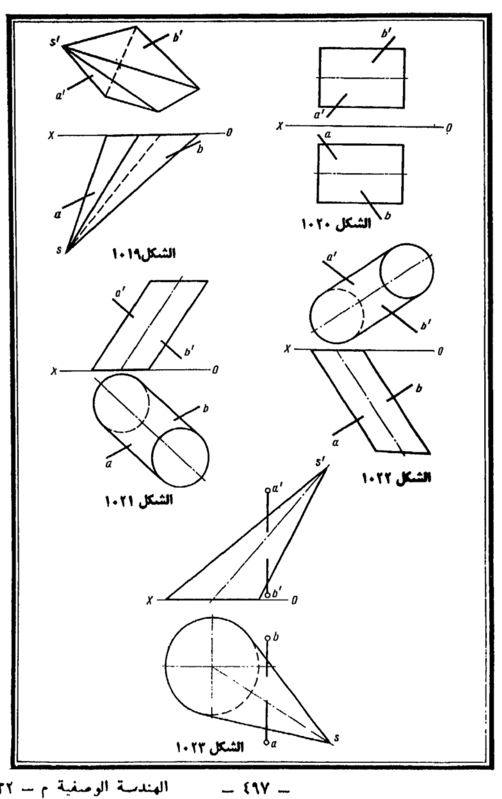
٤٨٩ ــ أوجد نقاط تقاطع المستقيم مع سطح الجسم المفروض (الموشور ، الهرم ، الاسطوانة ، المخروط ، الكرة ....) (الأشكال ١٠١٥ – ١٠٣٤) .

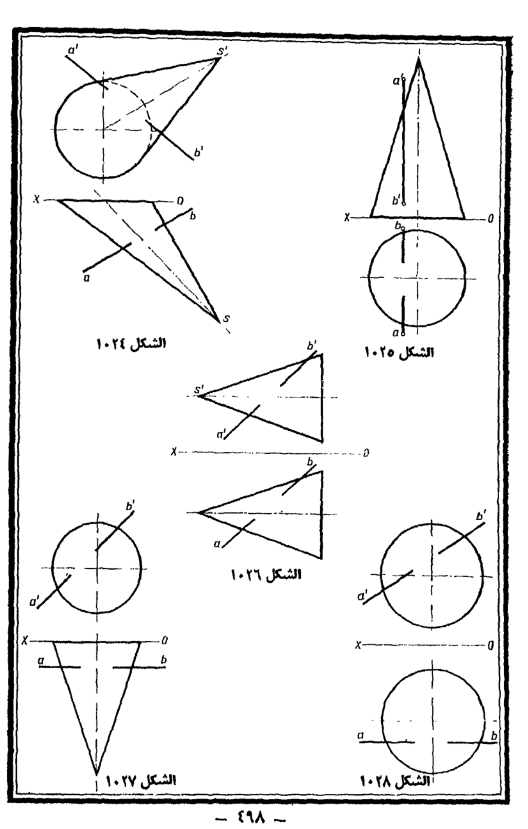


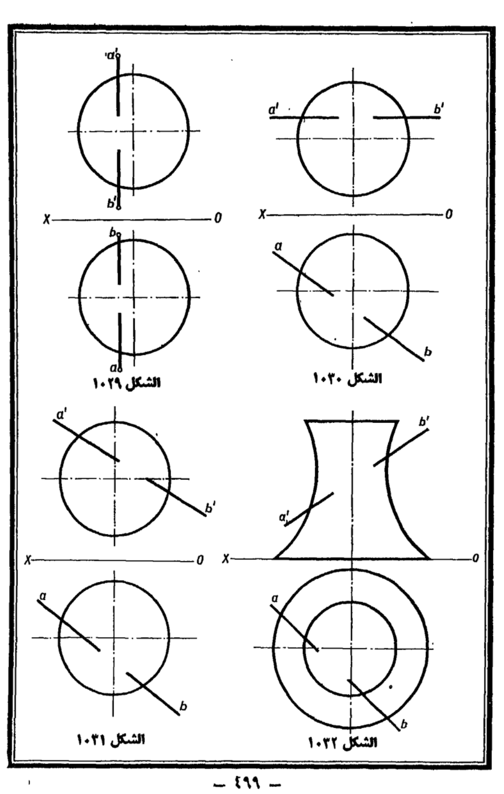
الشكل ١٠١٣

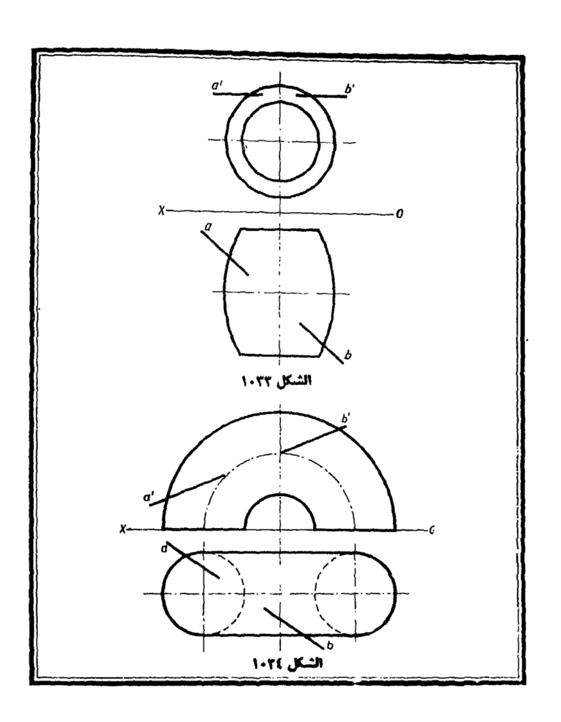
الشكل ١٠١٤


b'
a'
X
O
a
b
b'
a'
X
O
a
b
الشكل ١٠١٦
الشكل ١٠١٥
b'
a'
X
O
a
b
2'
a'
1'
3'
b'
4'
X
O
1
b
4
2
3
a
الشكل ١٠١٧
الشكل ١٠١٨


s'
b'
a'
X
O
b
a
s
الشكل١٠١٩
b'
a'
X
O
a
b
الشكل ١٠٢٠
a'
b'
X
O
b
a
الشكل ١٠٢١
a'
b'
X
O
b
a
الشكل ١٠٢٢
s'
a'
b'
X
O
b
a
s
الشكل ١٠٢٣


a'
s'
b'
X
0
b
a
s
الشكل ١٠٢٤
a'
b'
X
0
b
a
الشكل ١٠٢٥
b'
s'
a'
X
0
b
a
الشكل ١٠٢٦
b'
a'
X
0
a
b
الشكل ١٠٢٧
b'
a'
X
0
a
b
الشكل ١٠٢٨


a'
b'
X
0
b
a
الشكل ١٠٢٩
a'
b'
X
0
a
b
الشكل ١٠٣٠
a'
b'
X
0
a
b
الشكل ١٠٣١
b'
a'
X
0
a
b
الشكل ١٠٣٢



الشكل ١٠٣٣

الشكل ١٠٣٤

البحث السادس والعشرون

تقاطع السطوح

لإنشاء خط تقاطع سطحين علينا أن نعين مجموعة نقاط تنتمي بآن واحد لكل من السطحين ثم نصل النقاط حسب تتابع معين .

خط التقاطع يمكن أن يكون :

١ ــ منحني فراغي ــ في حالة تقاطع سطحين منحنيين أو سطح منحني مع كثير الوجوه .

٢ ــ خط منكسر فراغي ــ في حالة تقاطع كثيري الوجوه .

أحياناً خط تقاطع سطحين يمكن أن يكون مستوياً ــ خط مستقيم ، دائرة ، قطع ناقص .... الخ .

لتعيين نقطة ما من خط التقاطع نقوم بما يلي :

١ ــ نستخدم مستوياً مساعداً .

٢ ــ نعين خط تقاطع هذا المستوي مع كل من السطحين .

٣ ــ مكان تقاطع الخطين الحاصلين يعين لنا النقاط المطلوبة .

وبالتدريج باستعمال مجموعة مستويات مساعدة يمكننا تعيين العدد الكافي من النقاط .

ملاحظة : علينا اختيار المستوي المساعد بحيث تكون مساقط خط تقاطعه مع

كل من السطحين على مستويات الاسقاط بشكل خطوط بسيطة - مستقيم أو دائرة .

يمكن تعيين خط تقاطع كثيري الوجوه (AوB) بالشكل التالي :

١ - نعين نقاط تقاطع أحرف كثير الوجوه الأول (A) مع وجوه كثير الوجوه الثاني (B) .

٢ - نعين نقاط تقاطع أحرف كثير الوجوه الثاني (B) مع وجوه كثير الوجوه الأول (A) .

٣ - نصل النقاط الحاصلة على التتابع بخطوط مستقيمة .

ملاحظات : من الضروري أن توصل ببعضها فقط تلك النقاط التي تقع على نفس الوجه من كل من كثيري الوجوه .

إذا كان أحد السطحين المتقاطعين ذو مولدات مستقيمة فإن خط التقاطع يمكن تعيينه برسم مجموعة مولدات على هذا السطح وبتعيين نقاط تقاطعها مع السطح الآخر نصل هذه النقاط بخط منحني .

أحياناً لتعيين نقاط خط تقاطع سطحين منحنيين من الأسهل استخدام لامستوي بل سطح اسطواني أو مخروطي أو كروي .

إن أي سطح دوراني يقطع سطح كرة وفق دائرة إذا كان مركز الكرة يقع على محور الدوران .

أمثلـــة

● **المثال ٣٣٤ :** أوجد خط تقاطع الاسطوانتين (الشكل ١٠٣٥) .

الحل : نستخدم مستوياً مساعداً R موازياً للمستوي H فيقطع سطح الاسطوانة الشاقولية وفق دائرة أما سطح الاسطوانة الأفقية فوفق المولدات . مكان تقـاطع هذه الخطوط نجد النقطتين (2,2′) و (1,1′) . بصورة مماثلة نجد مجموعـــة النقاط الأخرى (انظر الرسم) .

بوصل هذه النقاط بخط منحن نجد خط التقاطع المنشود .

ملاحظة : يمكننا استخدام مستوي مساعد موازي للمستوي V .

● **المثال ٣٣٥ :** أوجد خط تقاطع الاسطوانتين (الشكل ١٠٣٦) .

الحل : نستخدم مستوياً مساعداً R موازياً للمستوي V فيقطع سطح الاسطوانتين وفق المولدات . مكان تقاطع هذه المولدات نجد النقطتـــين (2,2′) و (1,1′) . بصورة مماثلة نجد مجموعة النقاط الأخرى ثم نعين النقاط المميزة A,B,C,D,E,F بواسطة المستويات المساعدة S_1,S_2,S_3,S_4 (انظر الرسم) . بوصل جميع النقـاط الحاصلة بخط منحن نجد خط التقاطع المنشود .

ملاحظة : عند انشاء خط التقاطع علينا أن نوجه انتباهنا لتعيين النقاط المميزة لهذا الخط .

● **المثال ٣٣٦ :** أوجد خط تقاطع الاسطوانتين وارسم انفراد سطوحها الجانبية (الشكل ١٠٣٧) .

الحل : نقسم قاعدة الاسطوانة المائلة إلى إثني عشر جزء متساو ثم نرسم من نقاط التقسيم هذه المولدات ونعين نقاط تقاطعها مع سطح الاسطوانة الشاقولية . نستخدم مستوياً مساعداً R موازياً للمستوي V ومارآ من محور الاسطوانة الشاقولية فيقطع سطحي الاسطوانتين وفق المولدات ، مكان تقاطعها يعين لنا النقطتين المميزتين (a،a)،(b،b') . بوصل جميع النقاط الحاصلة بخط منحن نجد خط التقاطع المنشود .

انفرادات السطوح الجانبية للإسطوانتين ترسم وفق القاعدة العامة (الإنشاء واضح من الرسم) .

● **المثال ٣٣٧ :** أوجد خط تقاطع الاسطوانة مع المخروط (الشكل ١٠٣٨).

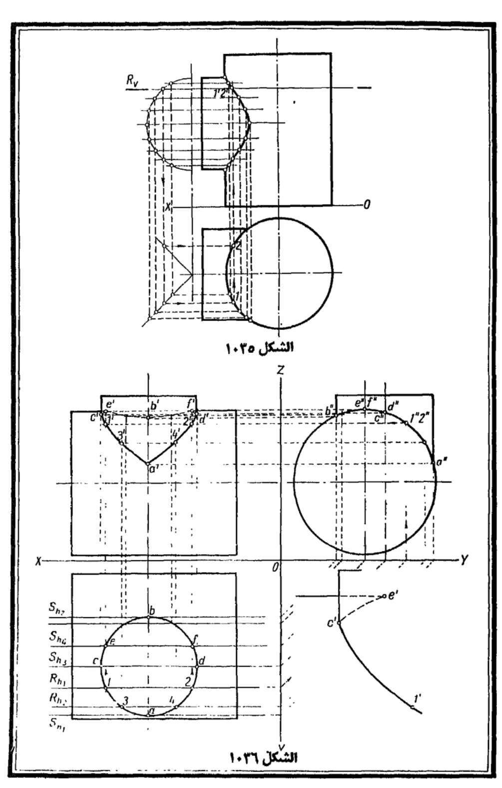
الحل : نستخدم مستوياً مساعداً R موازياً للمستوي W فيقطع سطح المخروط وفق دائرة وسطح الاسطوانة وفق المولدات ، مكان تقاطعها نجد النقطتين (2,2') و (1,1') .

بصورة مماثلة نعين مجموعة النقاط الأخرى ثم نعين النقاط المميزة A,B,C,D،E,F بواسطة المستويات المساعدة P,Q,S (على الرسم بدون رمز) . بوصل جميع النقاط الحاصلة بخط منحن نجد خط التقاطع المنشود .

استعمال المستوي المساعد الموازي للمستوي H أو V يعقد المسألة للغـاية (لماذا ؟) .

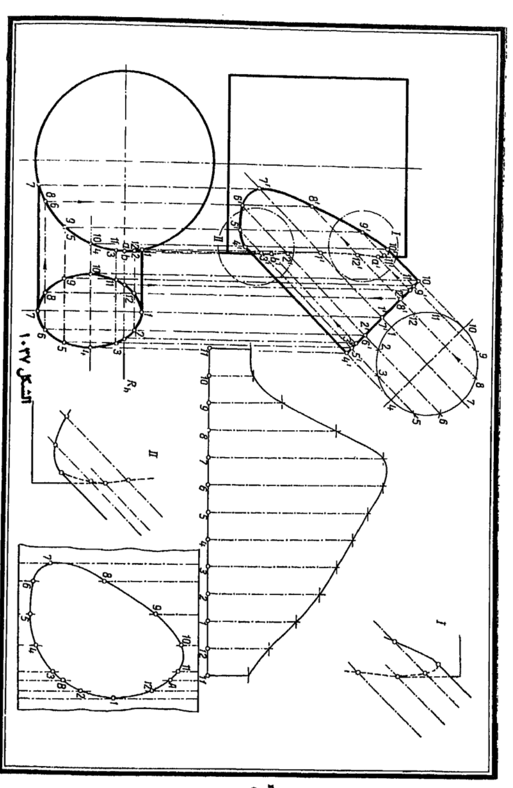
● **المثال ٣٣٨ :** أوجد خط تقاطع الاسطوانة مع المخروط وارسم انفرادات سطوحها الجانبية (الشكل ١٠٣٩) .

الحل : نقسم قاعدة الاسطوانة إلى إثني عشر جزء متساو ونرسم من نقاط التقسيم هذه المولدات ونعين نقاط تقاطعها مع سطح المخروط . بوصل هذه النقاط

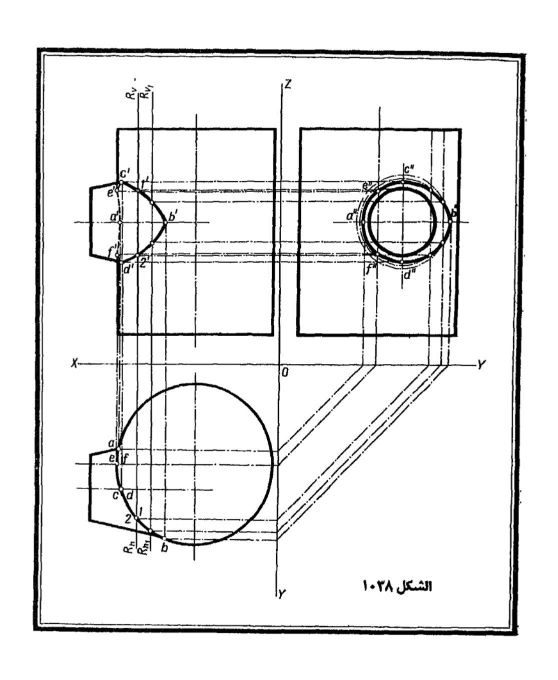


الشكل ١٠٣٥

الشكل ١٠٣٦



الشكل ١٠٣٧



الشكل ١٠٣٨

بخط منحنى نجد خط التقاطع المنشود .

انفرادات السطوح الجانبية للإسطوانة والمخروط ترسم وفق القاعدة العامه (الإنشاء واضح من الرسم) .

● **المثال ٣٣٩ :** أوجد خط تقاطع الاسطوانة مع المخروط (الشكل ١٠٤٠) .

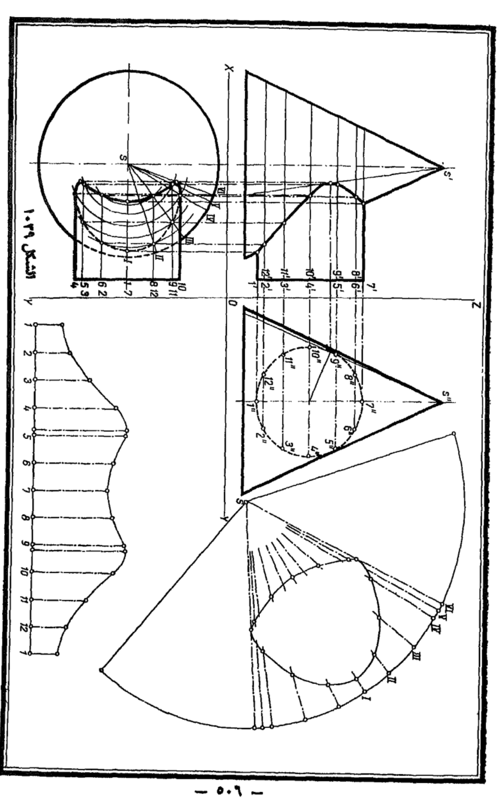
الحل : ننشىء على سطح المخروط إثني عشر مولداً ونعين نقاط تقاطعها مع سطح الاسطوانة ثم نعين النقاط المميزة A،B . بوصل جميع النقاط الحاصلة بخط منحن نجد خط التقاطع المنشود (الإنشاء واضح من الرسم) .

● **المثال ٣٤٠ :** أوجد خط تقاطع الاسطوانة مع المخروط مستخدماً سطوحاً كروية (الشكل ١٠٤١) .

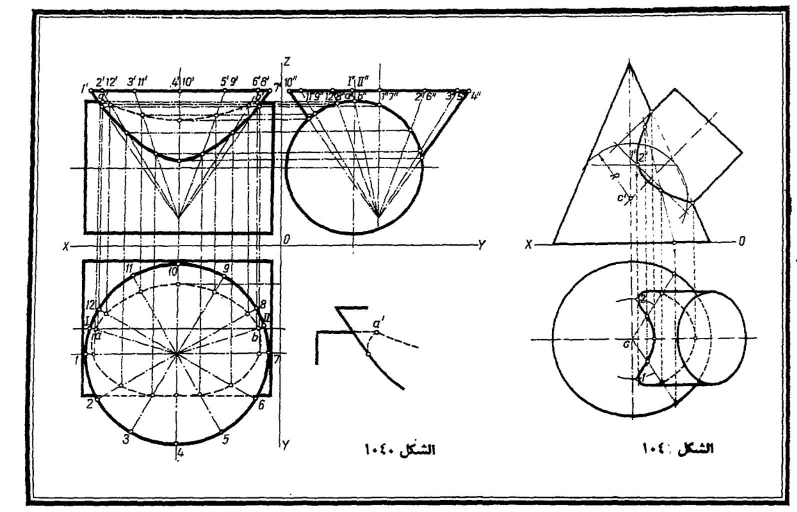
الحل : نأخذ النقطة (c،c′) تقاطع محور الإسطوانة مع محور المخروط كمركز للسطوح الكروية المساعدة . نرسم من النقطة (c،c′) كرة ذات نصف قطر اختياري R فتقطع كل من سطح الإسطوانة والمخروط وفق دائرة مساقطها الشاقولية خطوط مستقيمة أما الأفقية فبشكل قطوع ناقصة (لحل المسألة لا تلزمنا المساقط الأفقية لذا فإننا لا نرسم هذه القطوع الناقصة) . مكان تقاطع الخطوط المستقيمة هذه نجد المساقط الشاقولية (1′)،(2′) لهذه النقاط . ومنها باستعمال مولدات مساعدة (أو دوائر) نجد مساقطها الأفقية (1) ، (2 . بصورة مماثلة وبتغيير نصف قطر الكرة نجد بقية النقاط وبوصلها بخط منحن نجد خط التقاطع المنشود .

يمكننا كذلك إيجاد خط التقاطع باستخدام مستويات مساعدة لهذا لتجنب إنشاء خطوط منحنية بواسطة الشابلون(ما هي ؟) نأخذ هذه المستويات مارة من ذروة المخروط وموازية لمحور الإسطوانة . هذه الطريقة تعقد حل المسألة .

ملاحظة : ١ – إذا كانت محاور السطوح المتقاطعة لا تتوضع موازية لأحد مستويات الإسقاط فإن من المنطقي والمعقول نقلها إلى هذه الوضعية (لماذا ؟) .



الشكل ١٠٢٩



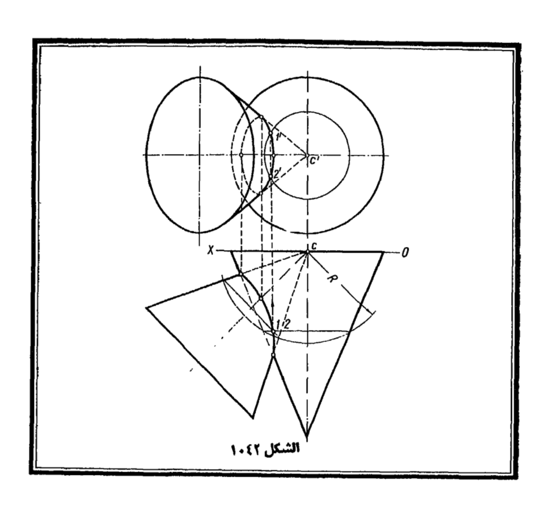
الشكل ١٠٤٠

الشكل ١٠٤١

٢ ـ إذا كان محور الإسطوانة لا يقطع محور المخروط نستخـــدم المستويات المساعدة المذكورة أعلاه .

٣ ـ إذا لم تكن الاسطوانة والمخروط سطوح دورانية فإننا كذلك نستخدم المستويات المساعدة الآنفة الذكر دون أن نأخذ بعين الإعتبار توضع محاورها .

● **المثال ٣٤١ :** أوجد خط تقاطع المخروطين (الشكل ١٠٤٢) .



الشكل ١٠٤٢

الحل : بما أن محوري المخروطين يتقاطعان في النقطة (c,c') فإننا نأخذ هذه النقطة كمركز للسطوح الكروية المساعدة . نرسم من النقطة (c,c') كرة ذات نصف قطر اختياري R فتقطع كل من السطحين المفروضين وفق دائرة مساقطها الأفقية بشكل خطوط مستقيمة أما الشاقولية فبشكل قطوع ناقصة (المساقط الشاقولية لا تلزم لحل المسألة لذا فإننا لا نرسم القطوع الناقصة) . مكان تقاطع هذه الخطوط المستقيمة نجد المساقط الأفقية $(2),(1)$ للنقاط ومنها باستخدام مولدات مساعدة (أو دوائر) نجد مساقطها الشاقولية $(2'),(1')$. بصورة مماثلة وبتغيير نصف قطر الكرة نجد بقية النقاط التي بوصلها بخط منحن نجد خط التقاطع المنشود .

يمكن تعيين خط التقاطع أيضاً باستخدام المستويات المساعدة . لتجنب إنشاء خطوط منحنية بواسطة الشابلون (ما هي ؟) نأخذ هذه المستويات مارة من ذروتي المخروطين . إن هذه الطريقة تعقد كثيراً حل المسألة .

ملاحظـة : ١ ــ إذا لم يتقاطع محورا المخروطين نستخدم المستويات المساعدة المذكورة أعلاه .

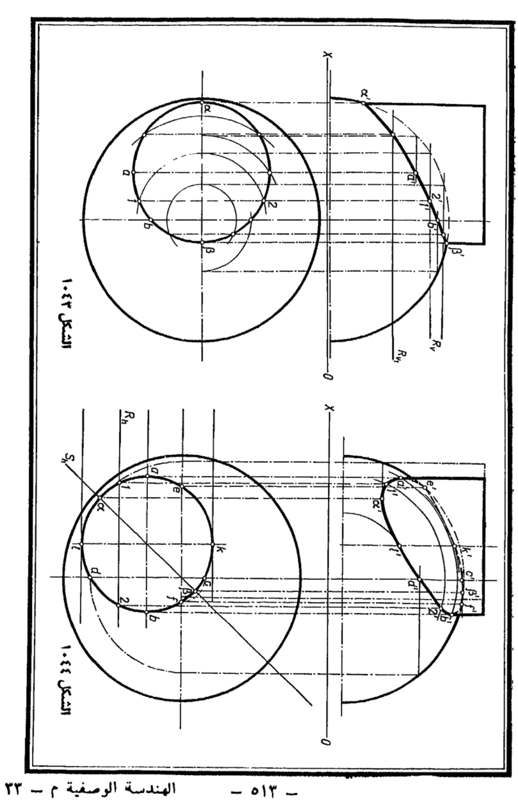
٢ ــ إذا لم يكن سطحا المخروطين دورانيين نستخدم المستويات المساعدة المذكورة أعلاه بغض النظر عن توضع المحاور .

● **المثال ٣٤٢ :** أوجد خط تقاطع الإسطوانة مع الكرة (**الشكل ١٠٤٣**) .

الحل : نستخدم مستوياً مساعداً R موازياً للمستوي H فيقطع كل من السطحين وفق دائرة مكان تقاطعها نجد $(2,2'),(1,1')$. بصورة مماثلة نجد مجموعة النقاط الأخرى ثم نعين النقاط المميزة : الدنيا (α,α') والعليا (β,β') ، (b,b')،(a,a') (انظر الرسم) .

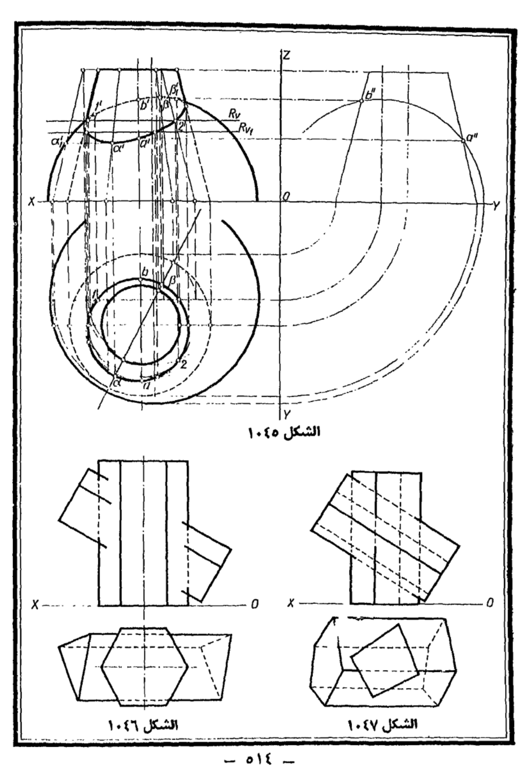
بوصل جميع النقاط الحاصلة بخط منحن نجد خط التقاطع المنشود .

يمكننا أيضاً استخدام مستوي مساعد موازي للمستوي V .



الشكل ١٠٤٣

الشكل ١٠٤٤



الشكل ١٠٤٥

الشكل ١٠٤٦

الشكل ١٠٤٧

● **المثال ٣٤٣ :** أوجد خط تقاطع الاسطوانة مع الكرة (الشكل ١٠٤٤) .

الحل : نستخدم مستوياً مساعداً R موازياً للمستوي V فيقطع سطح الكرة وفق دائرة وسطح الاسطوانة وفق المولدات ، مكان تقاطعها نجد النقطتين (1,1′)،(2,2′) . بصورة مماثلة نعين مجموعة النقاط الأخرى ثم نعين النقاط المميزة A،B،C،D،E،F (انظر الرسم) .

النقطة الدنيا (α,α') والنقطة العليا (β,β') تتعينان مكان تقاطع سطح الكرة مع مولدات الاسطوانة المتوضعة في المستوي الشاقولي S المار من محور الاسطوانة ومركز الكرة . بوصل جميع النقاط الحاصلة بخط منحن نجد خط التقاطع المنشود .

● **المثال ٣٤٤ :** أوجد خط تقاطع المخروط مع الكرة (الشكل ١٠٤٥) .

الحل : نستخدم مستوياً مساعداً R موازياً المستوي H فيقطع السطحين المفروضين وفق دائرتين مكان تقاطعها نجد النقطتين (2,2′)،(1,1′) . بصورة مماثلة نجد مجموعة النقاط الأخرى (انظر الرسم) . لتعيين النقطتين (β,β')،(α,α') ندور السطوح المفروضة حول محور الكرة العمودي على المستوي H بزاوية مناسبة φ (انظر الرسم) .

ونرسم المسقط الشاقولي للمخروط في الوضعية الجديدة (المسقط الشاقولي للكرة لا يتغير) . بعد تعيين (β_1,β'_1)،(α_1,α'_1) ندوّر المجموعة في الإتجاه المعاكس فنجد مساقط النقطتين المنشودتين (β,β')،(α,α') ، ثم نعين النقطتين (b,b′)،(a,a′) لتقاطع مولدي المخروط الجنبيّين مع سطح الكرة (انظر الرسم) .

بوصل جميع النقاط الحاصلة بخط منحن نجد خط التقاطع المنشود .

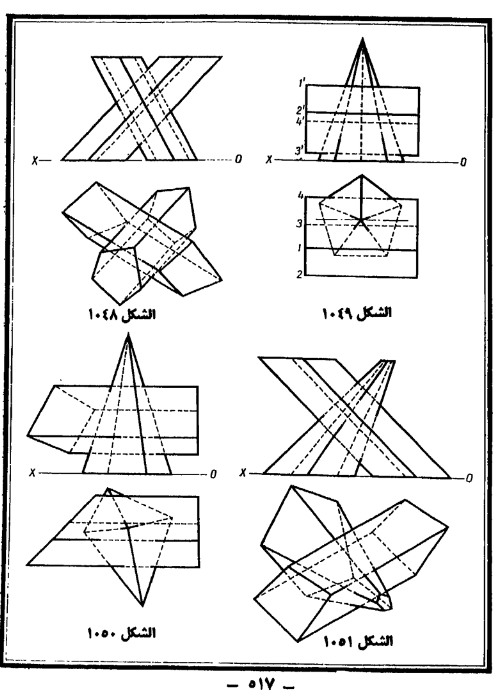
يمكن تعيين النقطتين (β,β')،(α,α') كذلك باستخدام طريقة تبديل مستويات الإسقاط (كيف ؟) . كما يمكن تعيين النقطتين (b,b′) (a,a′) دون استخدام مستوي الاسقاط الجنبي (كيف ؟) .

مسائـــل

٤٩٠ – لدينا سطحان (انظر في الأسفل) . انشيء خط تقاطعهما وانفراديهما مع اظهار خطوط التقاطع على هذه الإنفرادات :

موشور مع موشور (الشكل ١٠٤٦ – ١٠٤٨)
موشور مع هرم (الشكل ١٠٤٩ – ١٠٥١)
هرم مـــع هرم (الشكل ١٠٥٢ – ١٠٥٤)
موشور مع اسطوانة (الشكل ١٠٥٥ – ١٠٥٧)
موشور مع كرة (الشكل ١٠٥٨ ، ١٠٥٩)
موشور مع مخروط (الشكل ١٠٦٠ – ١٠٦٢)
هرم مع اسطوانة (الشكل ١٠٦٣ ، ١٠٦٤)
هرم مـــع كرة (الشكل ١٠٦٥)
هرم مـع مخروط (الشكل ١٠٦٦)
اسطوانة مع اسطوانة (الشكل ١٠٦٧ – ١٠٨٠)
اسطوانة مع مخروط (الشكل ١٠٨١ – ١٠٩٤)
اسطوانة مع كرة (الشكل ١٠٩٥ – ١١٠٠)
مخروط مع كرة (الشكل ١١٠١ – ١١٠٧)
مخروط مع مخروط (الشكل ١١٠٨ – ١١١٠)

٤٩١ – أنشيء مساقط خط تقاطع كرة مع اسطوانة دائرية قائمة نصف قطرها $r = 20$ mm ومحورها ينطبق مع مستقيم مفروض أما مركز قاعدتها العلوية فينطبق مع النقطة (c, c') (الشكل ١١٠٠ a) .

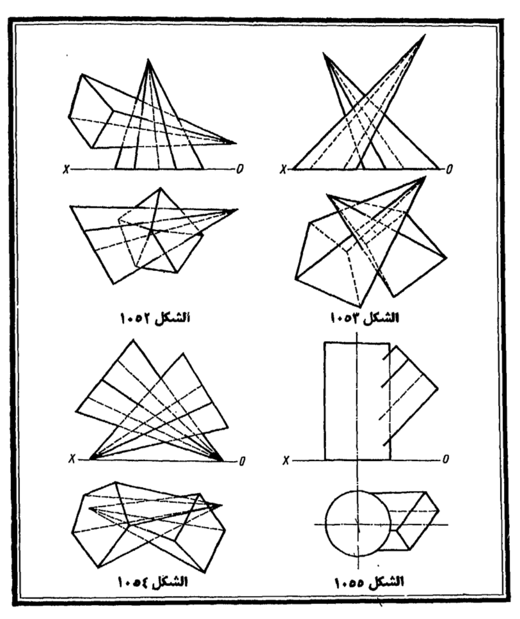


الشكل ١٠٤٨

الشكل ١٠٤٩

الشكل ١٠٥٠

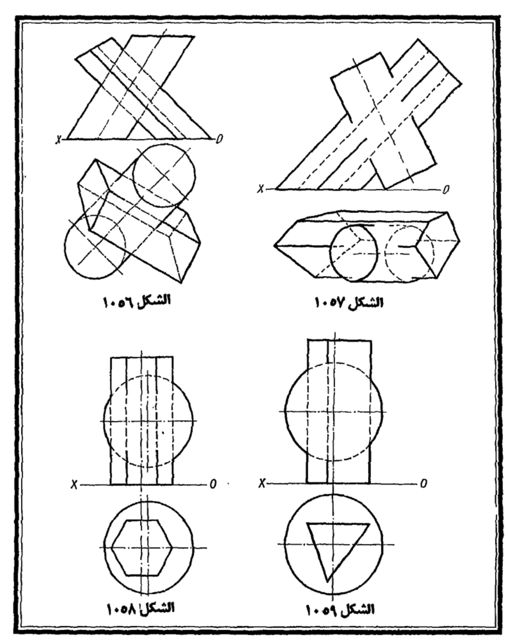
الشكل ١٠٥١



الشكل ١٠٥٢
الشكل ١٠٥٣
الشكل ١٠٥٤
الشكل ١٠٥٥

٤٩٢ ـ أنشىء مساقط خط تقاطع كرة مع مخروط دائري قائم ذروته في النقطة S ، إذا كان محور المخروط ينطبق مع مستقيم مفروض وزاوية رأسه تساوي 60° .

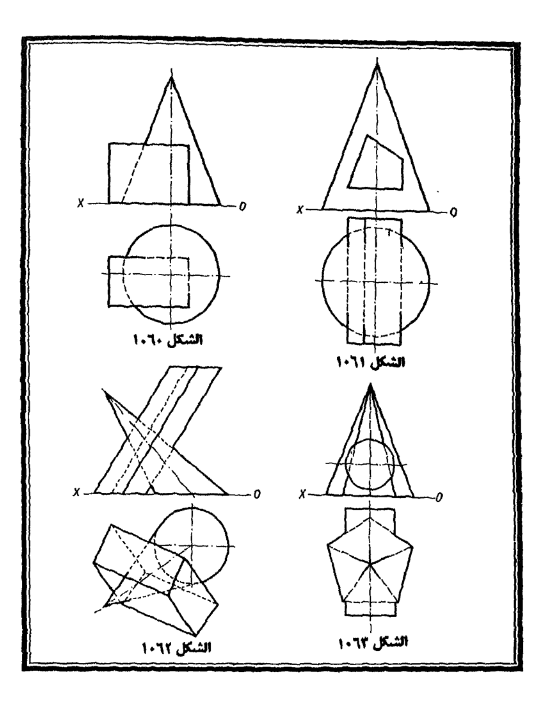
٤٩٣ ـ باستخدام السطوح الكروية المساعدة أنشىء مساقط خط التقاطع :



الشكل ١٠٥٦
الشكل ١٠٥٧
الشكل ١٠٥٨
الشكل ١٠٥٩

١ ـ لاسطوانتين (الشكل ١٠٦٧ ، ١٠٦٩ ، ١٠٧٢ ، ١٠٧٤) .

٢ ـ لاسطوانة مع مخروط (الشكل ١٠٧٩، ١٠٨١، ١٠٨٣، ١٠٨٦، ١٠٨٧، ١٠٩٠ ، ١٠٩١) .



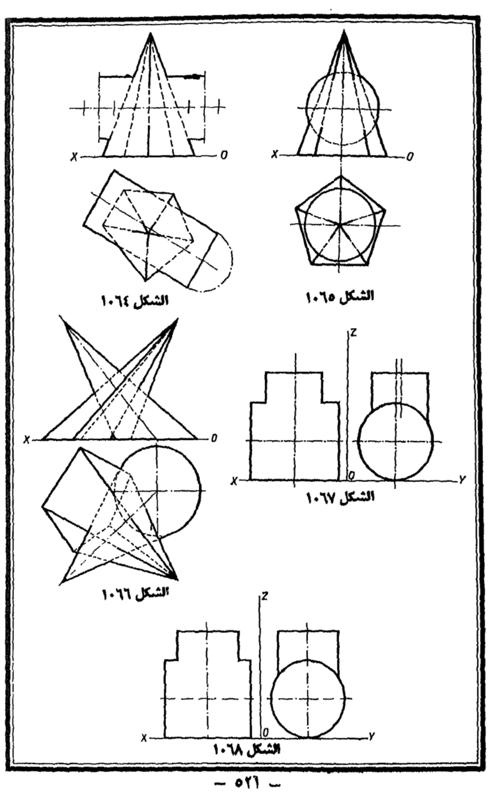
الشكل ١٠٦٠

الشكل ١٠٦١

الشكل ١٠٦٢

الشكل ١٠٦٣

٤٩٤ ـ أنشيء مساقط خط تقاطع مخروطين باستخدام السطوح الكروية المساعدة (الشكل ١١٠٨ ، ١١٠٩) .



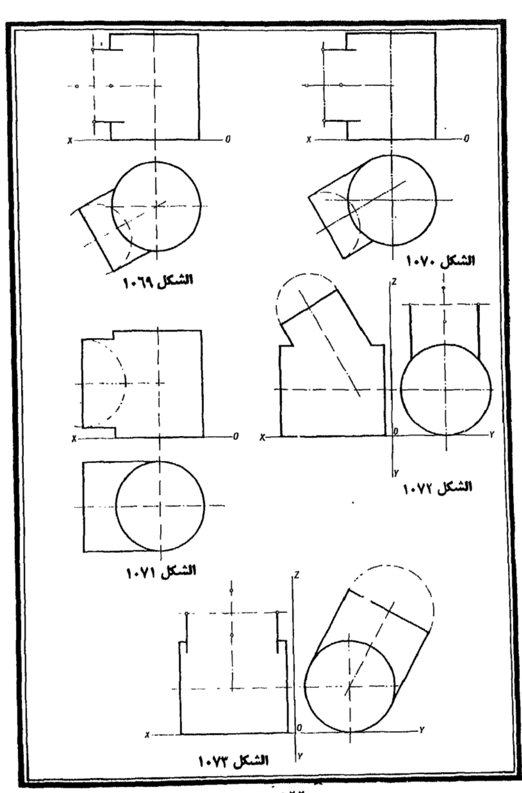
الشكل ١٠٦٤

الشكل ١٠٦٥

الشكل ١٠٦٦

الشكل ١٠٦٧

الشكل ١٠٦٨



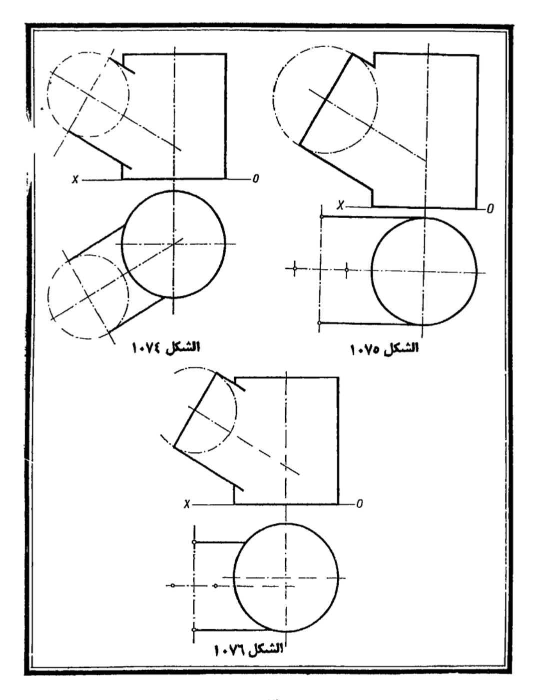
الشكل ١٠٦٩

الشكل ١٠٧٠

الشكل ١٠٧١

الشكل ١٠٧٢

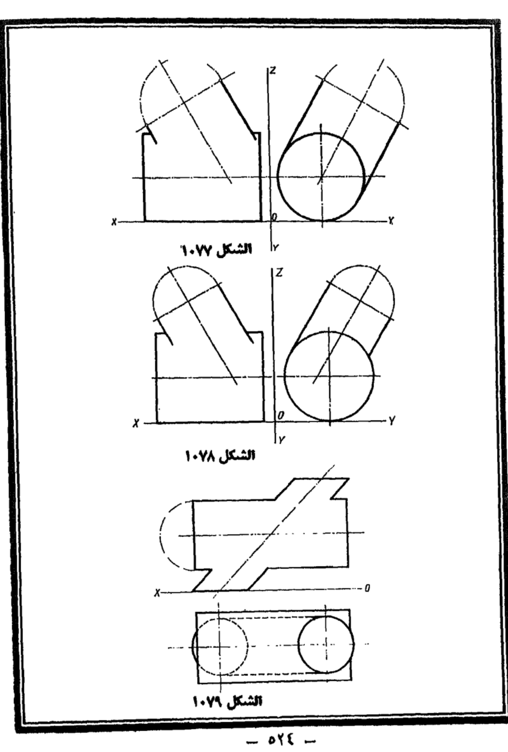
الشكل ١٠٧٣



الشكل ١٠٧٤

الشكل ١٠٧٥

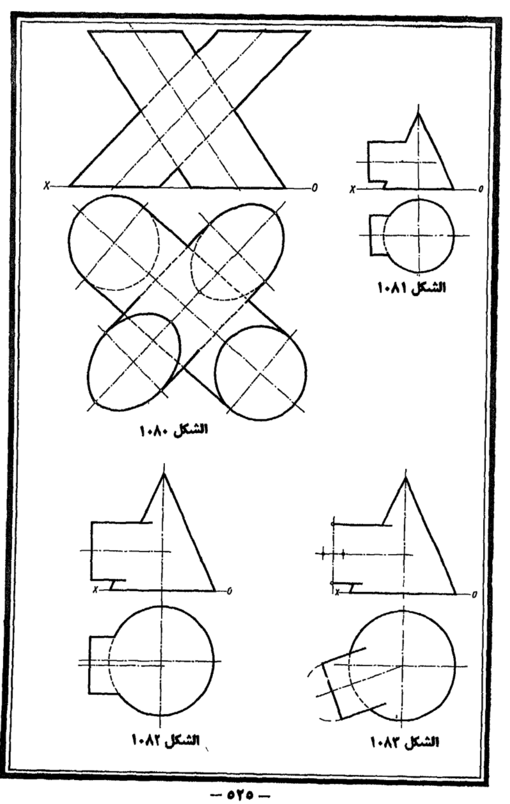
الشكل ١٠٧٦



الشكل ١٠٧٧

الشكل ١٠٧٨

الشكل ١٠٧٩

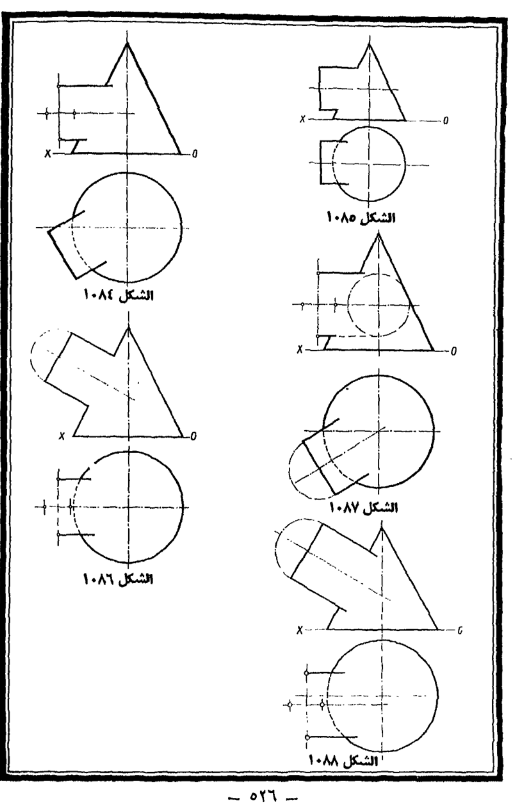


الشكل ١٠٨٠

الشكل ١٠٨١

الشكل ١٠٨٢

الشكل ١٠٨٣



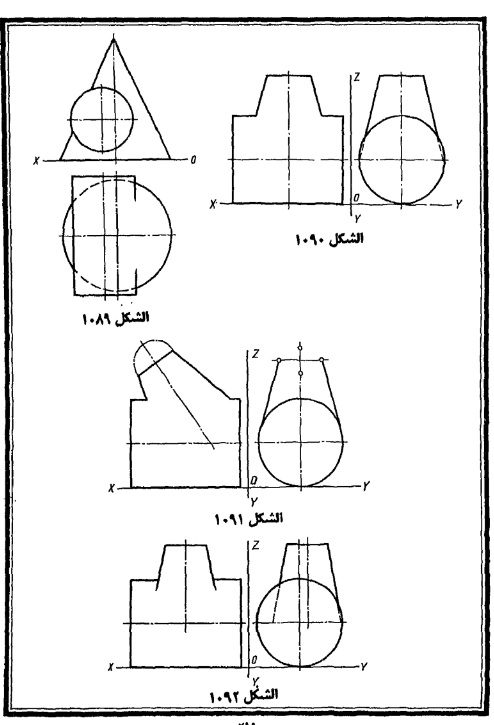
الشكل ١٠٨٤

الشكل ١٠٨٥

الشكل ١٠٨٦

الشكل ١٠٨٧

الشكل ١٠٨٨

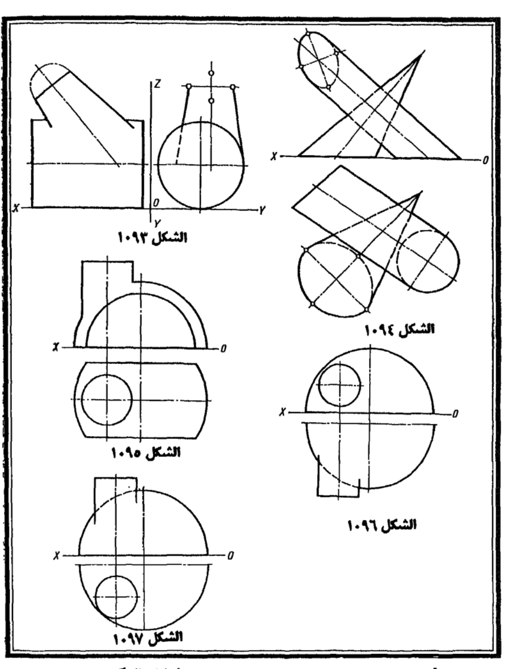


الشكل ١٠٨٩

الشكل ١٠٩٠

الشكل ١٠٩١

الشكل ١٠٩٢



الشكل ١٠٩٣

الشكل ١٠٩٤

الشكل ١٠٩٥

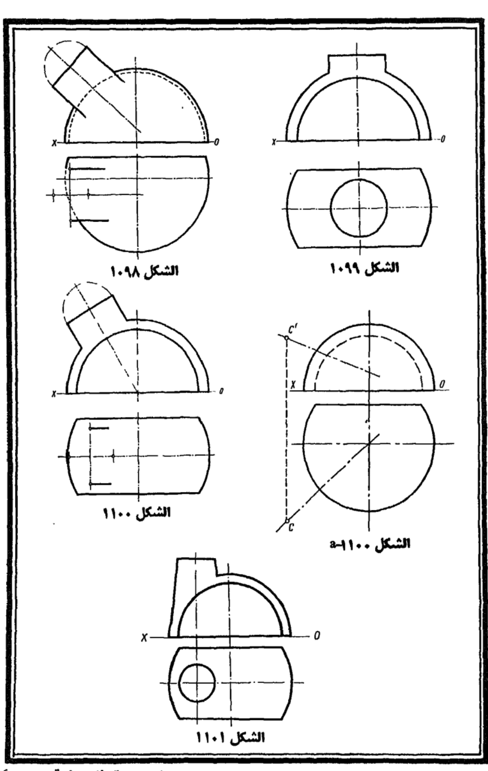
الشكل ١٠٩٦

الشكل ١٠٩٧

٤٩٥ ـ أنشيء مساقط خط تقاطع سطح حلقة مع اسطوانة (الشكل ١١١١، ١١١٢) .

٤٩٦ ـ أنشيء خط تقاطع سطح حلقة مع مخروط (الشكل ١١١٣) .

٤٩٧ ـ أنشيء مساقط خط تقاطع سطح حلقة مع اسطوانة تنتهي بكرة (الشكل ١١١٤) .



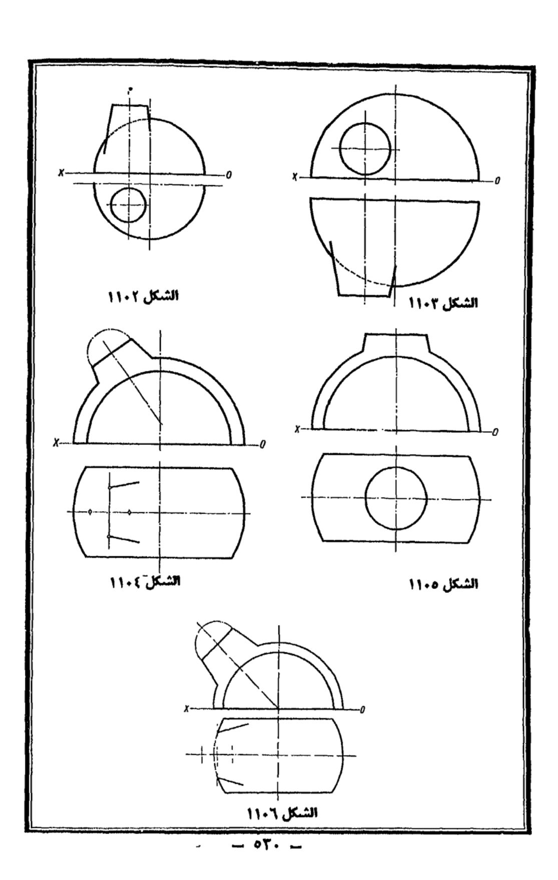
الشكل ١٠٩٨

الشكل ١٠٩٩

الشكل ١١٠٠

الشكل ١١٠٠-a

الشكل ١١٠١



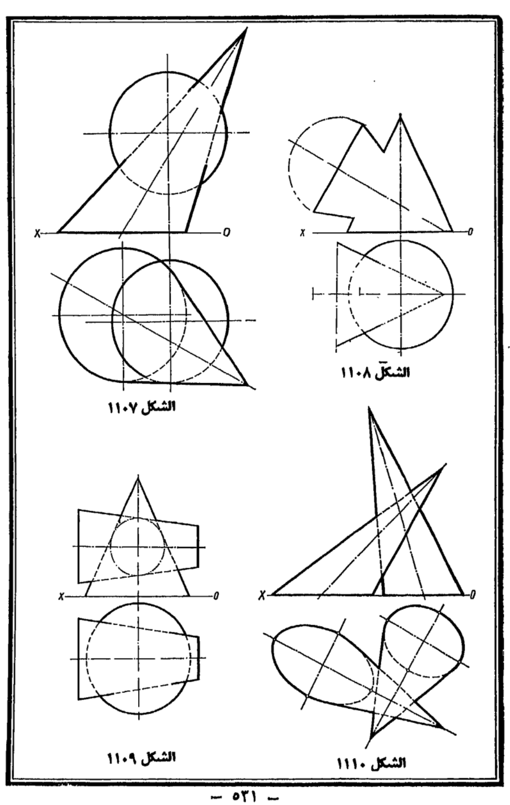
الشكل ١١٠٢

الشكل ١١٠٣

الشكل ١١٠٤

الشكل ١١٠٥

الشكل ١١٠٦

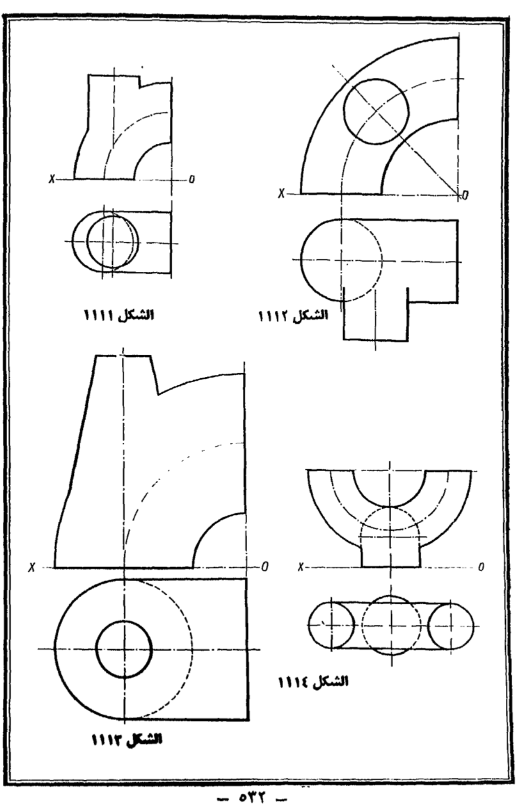


الشكل ١١٠٧

الشكل ١١٠٨

الشكل ١١٠٩

الشكل ١١١٠



الشكل ١١١١

الشكل ١١١٢

الشكل ١١١٣

الشكل ١١١٤

البحث السابع والعشرون

مسائل مختلفــــة

(لجميع الفصول)

حل بطرق مختلفة كل من المسائل التالية أدناه :

٤٩٨ – أوجد نقطة تقاطع المستويات P،Q،R (الشكل ١١١٥،١١١٦) .

٤٩٩ – أنشيء من النقطة A مستقيماً يوازي المستويين P،Q (الشكل ١١١٧).

٥٠٠ – انشيء من النقطة K مستقيماً موازياً للمستوي الشاقولي R وللمستوي المعطى بالمستقيم AB والنقطة C (الشكل ١١١٨) .

٥٠١ – أنشيء من النقطـة K مستقيماً موازياً للمستوي الأمـامي R وللمستوي المعطى بالمستقيمين المتوازيين AB،CD (الشكل ١١١٩) .

٥٠٢ – أنشيء من النقطة K مستقيماً موازياً للمستوي P وللمستوي المعطى بالمستقيمين المتقاطعين AB،AC (الشكل ١١٢٠) .

٥٠٣ – أنشيء من النقطة M مستقيماً موازياً للمستوين الأول المعطى بمستقيمين متقاطعين AB،CD والآخر بمستقيمين متوازيين EF،KL (الشكل ١١٢١) .

٥٠٤ – أنشيء في المستوي P ومن النقطة A مستقيمـاً موازياً للمستوي Q (الشكل ١١٢٢) .

٥٠٥ – أنشيء من النقطة K مستقيماً MN يقطع المستقيمين المفروضين AB،CD (الشكل ١١٢٣) .

٥٠٦ – اقطع المستقيمات المفروضة AB،CD،EF بمستقيم ما MN (الشكل ١١٢٤).

٥٠٧ ــ اقطع المستقيمين المفروضين AB،CD بمستقيم MN موازٍ للمستقيم EF (الشكل ١١٢٤) .

٥٠٨ ــ اقطع المستقيمين المفروضين AB،CD بالمستقيم MN الموازي لخط الأرض دون استخدام المستوي الجنبي (الشكل ١١٢٥) .

٥٠٩ ــ اقطع المستقيمين المفروضين AB،CD بمستقيم ما MN يميل على مستويي الإسقاط ميلاً واحداً (الشكل ١١٢٥) .

٥١٠ ــ اقطع المستقيمين المفروضين AB،CD بمستقيم يشكل مع مستوي الإسقاط الأفقي زاوية قدرها 45° ومع مستوي الإسقاط الشاقولي زاوية قدرها 80° (الشكل ١١٢٥) .

٥١١ ــ اقطع المستقيمات AB،AC،AD بالمستقيم AM الذي يشكل زوايا متساوية مع المستقيمات المفروضة (الشكل ١١٢٦) .

٥١٢ ــ أنشىء من النقطة M مستقيماً KL يشكل مع المستقيمات AB،CD،EF زوايا متساوية (الشكل ١١٢٧) .

٥١٣ ــ عيّن على المستوي P المحل الهندسي للنقاط المتساوية البعد عن النقطتين A،B من هذا المستوي (الشكل ١١٢٨) .

٥١٤ ــ أنشىء في المستوي P مثلثاً متساوي الساقين ABC ذروته A على الأثر الأفقي للمستوي إذا علم المسقط الشاقولي للضلع BC (الشكل ١١٢٩) .

٥١٥ ــ أنشىء من النقطة M من المستقيم AB عموداً MN يقطع المستقيم CD (الشكل ١١٣٠) .

٥١٦ – أنشيء مساقط كرة نصف قطرها 25 mm تغلق فتحة دائرية نصف قطرها 20 mm واقعة في المستوي P (الشكل ١١٣١).

٥١٧ – أنشيء مساقط كرة نصف قطرها 25 mm تمس المستوي P إذا علم المسقط الشاقولي للنقطة C – مركز الكرة (الشكل ١١٣٢).

٥١٨ – أنشيء مساقط كرة نصف قطرها 25 mm تمس المستوي المعطى بالمستقيم AB والنقطة D إذا علم المسقط الافقي للنقطة C مركز الكرة (الشكل ١١٣٣).

٥١٩ – أنشيء مساقط كرة نصف قطرها 30 mm تمس المستوي المعطى بالمستقيمين المتوازيين AB،DE إذا علم المسقط الشاقولي للنقطة C مركز الكرة (الشكل ١١٣٤).

٥٢٠ – أنشيء مساقط كرة نصف قطرها 25 mm تمس مستوي المثلث KLM إذا علم المسقط الأفقي للنقطة C مركز الكرة (الشكل ١١٣٥).

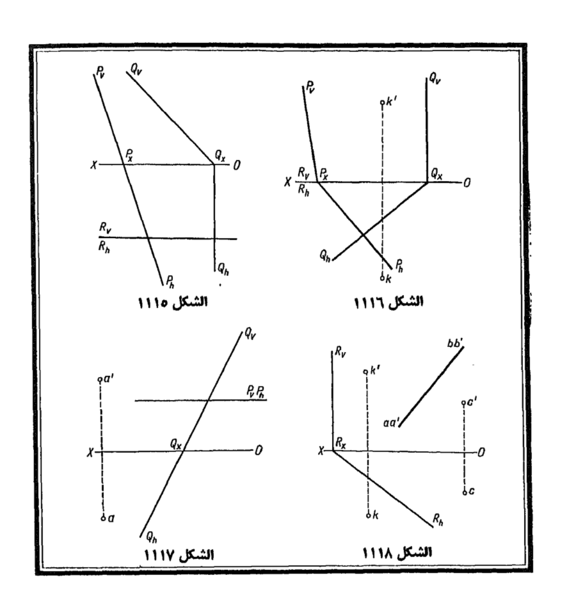
٥٢١ – أنشيء مساقط كرة نصف قطرها 25 mm تمس المستوي P بحيث يقع مركزها على المستقيم AB (الشكل ٤٦٦).

٥٢٢ – أنشيء مساقط كرة نصف قطرها 25 mm تمس المستوي المعطى بالمستقيم AB والنقطة D بحيث يقع مركزها على المستقيم MN (الشكل ١١٣٦).

٥٢٣ – أنشيء مساقط كرة نصف قطرها 25 mm تمس المستوي المعطى بالمستقيمين المتوازيين AB،DE بحيث يقع مركزها على المستقيم MN (الشكل ١١٣٧).

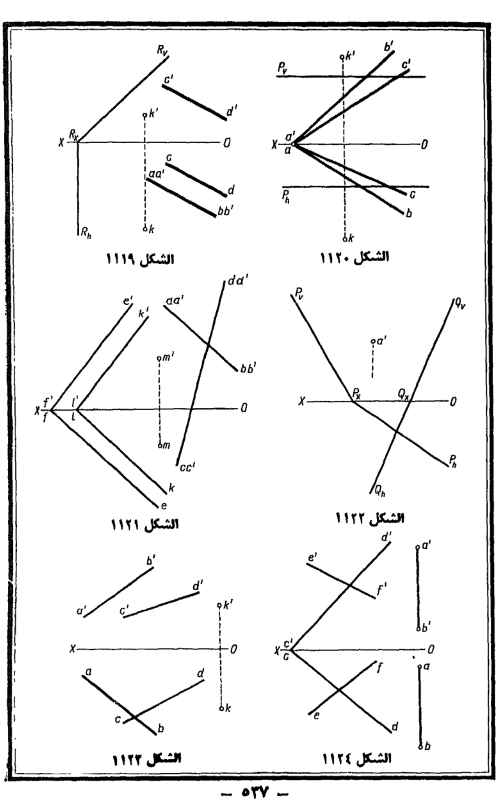
٥٢٤ – أنشيء مساقط كرة نصف قطرها 25 mm تمس مستوي المثلث DEF بحيث يقع مركزها على المستقيم AB (الشكل ١١٣٨).

٥٢٥ – أنشيء من النقطة K مستوياً Q عمودياً على المستوي P ويميل بصورة متماثلة على مستويي الإسقاط (الشكل ٦٤٠ ، ٦٤١).



٥٢٦ ــ أنشيء من النقطة K مستوياً P عمودياً على المستوي المعطى بالمستقيم AB والنقطة C ويميل بصورة متماثلة على مستويي الإسقاط (الشكل ٦٤٢) .

٥٢٧ ــ أنشيء من النقطة K مستوياً P عمودياً على المستوي المعطى بالمستقيمين



الشكل ١١١٩

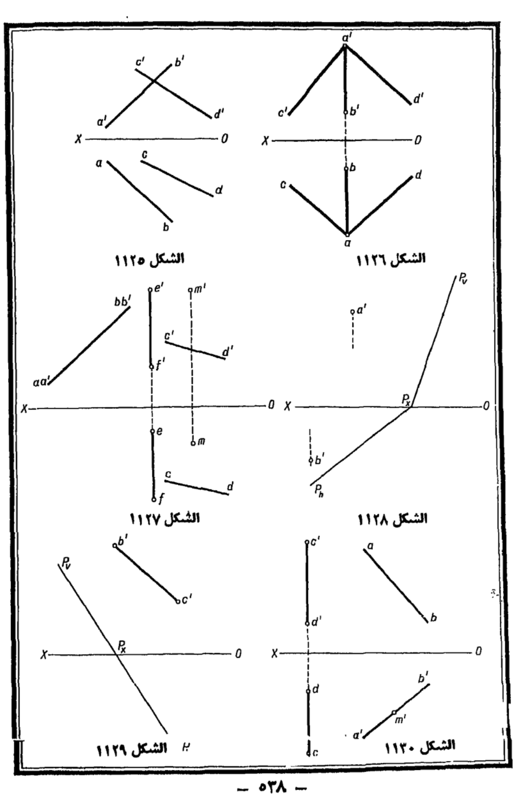
الشكل ١١٢٠

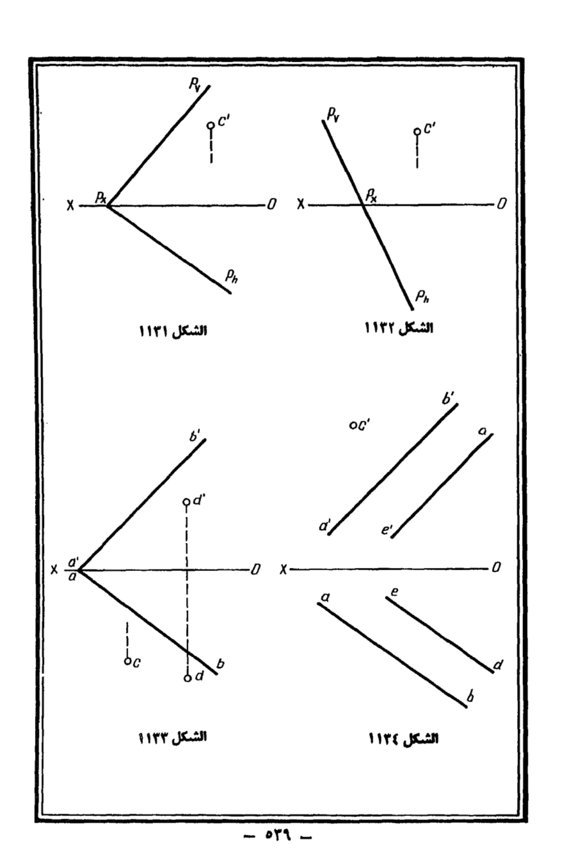
الشكل ١١٢١

الشكل ١١٢٢

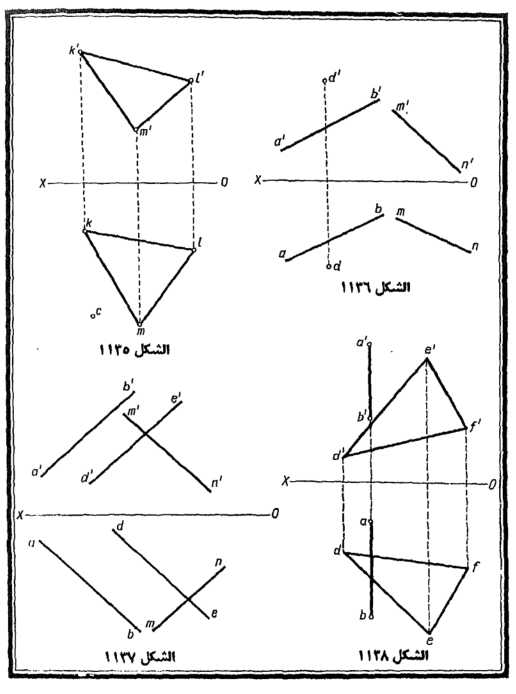
الشكل ١١٢٣

الشكل ١١٢٤


c'
b'
a'
d'
X
0
a
c
d
b
الشكل ١١٢٥
a'
c'
b'
d'
X
0
b
c
d
a
الشكل ١١٢٦
e'
m'
bb'
c'
d'
f'
aa'
X
0
e
m
c
d
f
الشكل ١١٢٧
P_v
a'
P_x
X
0
b'
P_h
الشكل ١١٢٨
b'
P_v
c'
P_x
X
0
الشكل ١١٢٩
c'
a
d'
b
X
0
d
b'
m'
a'
c
الشكل ١١٣٠



Pv
c'
X
Px
0
Ph
الشكل ١١٣١
Pv
c'
X
Px
0
Ph
الشكل ١١٣٢
b'
d'
X
a'
a
0
c
d
b
الشكل ١١٣٣
b'
c'
a
a'
e'
X
0
a
e
d
b
الشكل ١١٣٤



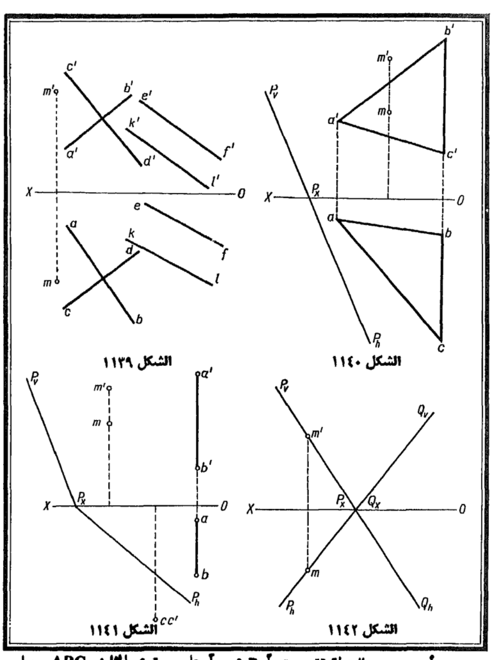
الشكل ١١٣٥

الشكل ١١٣٦

الشكل ١١٣٧

الشكل ١١٣٨

المتوازيين AB،CD ويميل بصورة متماثلة على مستويي الإصقــاط (الشكل ٦٤٣) .



الشكل ١١٣٩ الشكل ١١٤٠ الشكل ١١٤١ الشكل ١١٤٢

٥٢٨ ـ أنشيء من النقطة K مستوياً P عمودياً على مستوي المثلث ABC ويميل ميلاً واحداً على مستويي الإسقاط (الشكل ٦٤٤).

٥٢٩ ـ أنشيء من النقطة M مستوياً P عمودياً على المستويين المعطيين الأول بالمستقيمين المتقاطعين AB،CD والآخر بالمستقيمين المتوازيين EF،KL (الشكل ١١٣٩).

٥٣٠ ـ أنشيء من النقطة M مستوياً عمودياً على المستوي P وعلى مستوي المثلث ABC (الشكل ١١٤٠) .

٥٣١ ـ أنشيء من النقطة M مستوياً عمودياً على المستوي P وعلى المستوي المعطى بالمستقيم AB والنقطة C (الشكل ١١٤١) .

٥٣٢ ـ أنشيء من النقطة M مستوياً عمودياً على المستويين P،Q (الشكل١١٤٢) .

٥٣٣ ـ أنشيء من النقطة M مستوياً Q عمودياً على المستوي P وعلى المستوي المفروض بالمستقيمين المتوازيين AB،CD (الشكل ١١٤٣) .

٥٣٤ ـ أنشيء المحل الهندسي في الفراغ للنقاط المتساوية البعد عن مستقيمين متوازيين AB،CD (الشكل ٥٩٩) .

٥٣٥ ـ أنشيء في المستوي P المحل الهندسي للنقاط المتساوية البعد عن مستقيمين متوازيين AB،CD (الشكل ٦٠٢) .

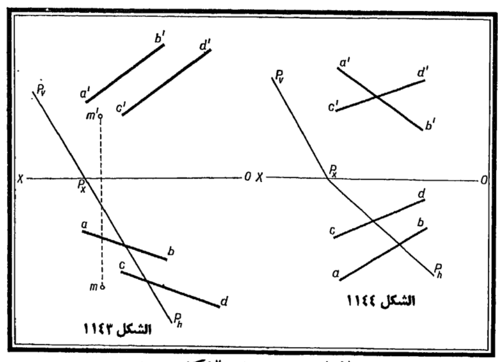
٥٣٦ ـ عين على المستقيم MN النقطة K المتساوية البعد عن المستقيمين المتوازيين AB،CD (الشكل ٦٠٧) .

٥٣٧ ـ أنشيء المستقيم MN العمودي على المستوي P والقاطع للمستقيمين AB،CD (الشكل ١١٤٤) .

٥٣٨ ـ اقطع المستقيمين المفروضين AB،CD بمستقيم MN عمودي عليهما (الشكل ٥٧٨) .

٥٣٩ ـ أنشيء المستوي P المتساوي البعد عن مستقيمين اختياريين AB،CD (الشكل ٥٧٨) .

٥٤٠ ـ أنشيء المحل الهندسي في الفراغ للنقاط المتساوية البعد عن أقرب نقطتين



بين مستقيمين اختياريين AB،CD (الشكل ٥٧٨) .

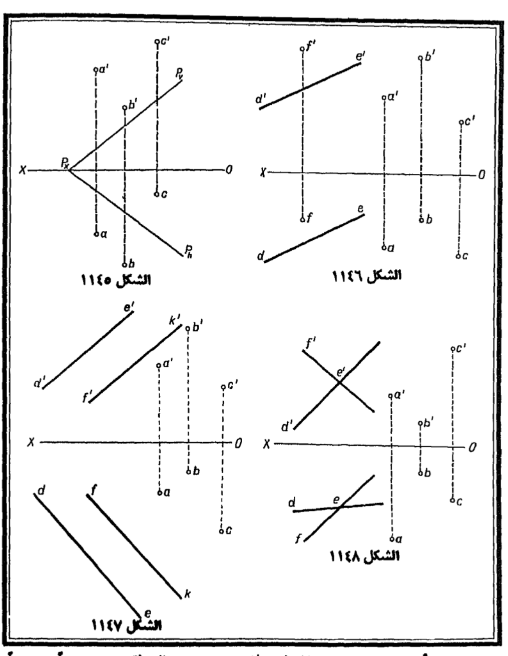
٥٤١ – أوجد على المستوي P المحل الهندسي للنقاط المتساوية البعد عن أقرب نقطتين بين مستقيمين اختياريين AB،CD (الشكل ١١٤٤) .

٥٤٢ – أوجد على المستقيم EF نقطة متساوية البعد عن أقرب نقطتين بين مستقيمين اختياريين AB،CD (الشكل ١١٢٤) .

٥٤٣ – أنشىء في المستوي P مستقيماً عمودياً على المستقيم AB ومارّاً من نقطة تقاطعه مع المستوي (الشكل ٥٥٦) .

٥٤٤ – أنشىء في مستوي المثلث ABC مستقيماً عمودياً على المستقيم MN ومارّاً من نقطة تقاطعه مع المستوي (الشكل ٦٩٨) .

٥٤٥ – أنشىء في المستوي المعطى بالمستقيمين المتوازيين AB،CD مستقيماً عمودياً على المستقيم MN ومارّاً من نقطة تقاطعه مع المستوي (الشكل ٦٠٧) .



الشكل ١١٤٥

الشكل ١١٤٦

الشكل ١١٤٧

الشكل ١١٤٨

٥٤٦ – أنشىء في المستوي المعطى بالمستقيم AB والنقطة C مستقيماً عمودياً على المستقيم MN ومارّاً من نقطة تقاطعه مع المستوي (الشكل ٦٠٦).

٥٤٧ – عين على المستوي P نقطة متساوية البعد عن النقاط الخارجية الثلاث A, B,C (الشكل ١١٤٥):

٥٤٨ – عين على المستوي المعطى بالمستقيم DE والنقطة F نقطة K متساوية البعد عن النقاط الخارجية الثلاث A, B, C (الشكل ١١٤٦) .

٥٤٩ – عين على المستوي المعطى بالمستقيمين المتوازيين DE،FK النقطة M المتساوية البعد عن ثلاث نقاط خارجية A،B،C (الشكل ١١٤٧) .

٥٥٠ – عين على المستوي المعطى بالمستقيمين المتقاطعين DE،EF النقطة K المتساوية البعد عن ثلاث نقاط خارجية A،B،C (الشكل ١١٤٨) .

٥٥١ – أنشيء المحل الهندسي في الفراغ للنقاط المتساوية البعد عن مستقيمين متقاطعين AB،AC (الشكل ١١٤٩) .

٥٥٢ – أنشيء في المستوي P المحل الهندسي للنقاط المتساوية البعد عن مستقيمين متقاطعين AB،AC (الشكل ١١٥٠) .

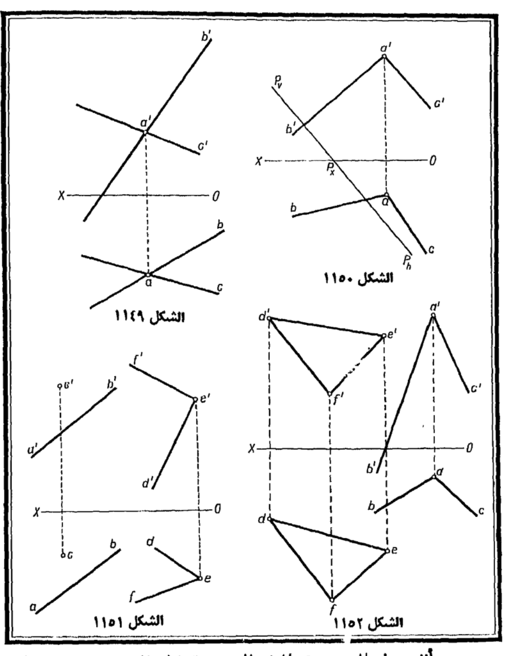
٥٥٣ – أنشيء في المستوي المعطى بالمستقيم AB والنقطة C المحل الهندسي للنقاط المتساوية البعد عن مستقيمين متقاطعين DE،EF (الشكل ١١٥١) .

٥٥٤ – أنشيء في مستوي المثلث DEF المحل الهندسي للنقاط المتساوية البعد عن مستقيمين متقاطعين AB ،AC (الشكل ١١٥٢) .

٥٥٥ – أنشيء في المستوي المعطى بالمستقيمين المتوازيين DE،FK المحل الهندسي للنقاط المتساوية البعد عن مستقيمين متقاطعين AB،AC (الشكل ١١٥٣) .

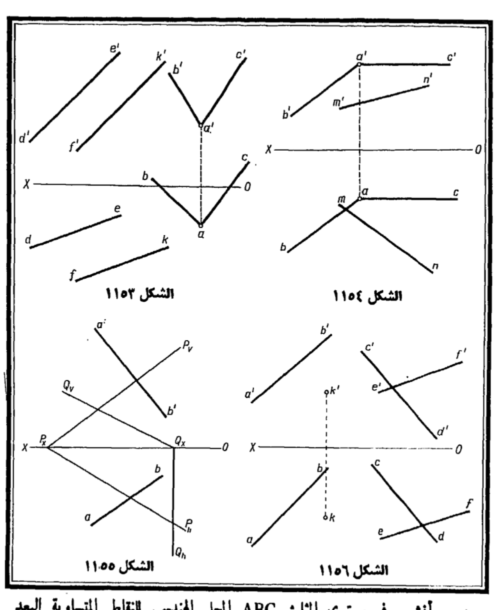
٥٥٦ – عين على المستقيم الخارجي MN نقطة متساوية البعد عن المستقيمين المتقاطعين AB،AC (الشكل ١١٥٤) .

٥٥٧ – أنشيء المحل الهندسي في الفراغ للنقاط المتساوية البعد عن آثار المستوي P (الشكل ٥٩٦ ، ٥٩٧) .



٥٥٨ ـ أنشىء في المستوي Q المحل الهندسي للنقاط المتساوية البعد عن آثار المستوي P (الشكل ٣٩٣،٣٩٤) .

٥٥٩ ـ أنشىء في المستوي المعطى بمستقيمين متوازيين AB،CD المحل الهندسي للنقاط المتساوية البعد عن آثار المستوي P (الشكل ٦٠٢) .



الشكل ١١٥٣ الشكل ١١٥٤

الشكل ١١٥٥ الشكل ١١٥٦

٥٦٠ – أنشيء في مستوي المثلث ABC المحل الهندسي للنقاط المتساوية البعد عن آثار المستوي P (الشكل ٦٠٣ ، ٤٧٤) .

٥٦١ – أنشيء في المستوي المعطى بالمستقيم AB والنقطة C المحل الهندسي للنقاط المتساوية البعد عن آثار المستوي P (الشكل ٦٠١) .

٥٦٢ — عين على المستقيم AB من المستوي P نقطة متساوية البعد عن آثار ذلك المستوي (الشكل ٣٤٠ ، ٣٤١) .

٥٦٣ — عين على المستقيم الخارجي AB نقطة متساوية البعد عن آثار المستوي P (الشكل ٤٩٩) .

٥٦٤ — أنشىء المحل الهندسي في الفراغ للنقاط المتساوية البعد عن المستويين P،Q (الشكل ٣٩٣ ، ٣٩٤) .

٥٦٥ — أنشىء في المستوي P المحل الهندسي للنقاط المتساوية البعد عن المستويين Q،R (الشكل ١١١٥ ، ١١١٦) .

٥٦٦ — عين على المستقيم AB نقطة متساوية البعد عن المستويين P،Q (الشكل ١٥٥ !) .

٥٦٧ — أنشىء من النقطة K مستوياً يميل ميلاً واحداً على مستويي الإسقاط بحيث ينطبق مسقطا المستقيمين المتوازيين AB،CD على هذا المستوي في خط مستقيم واحد (الشكل ٦٤٣) .

٥٦٨ — أنشىء من النقطة K مستوياً موازياً للمستقيم EF بحيث ينطبق مسقطا المستقيمين المتوازيين AB،CD على هذا المستوي في خط مستقيم واحد (الشكل ٥٢٦) .

٥٦٩ — أنشىء من المستقيم EF مستوياً بحيث ينطبق مسقطا المستقيمين المتوازيين AB،CD على هذا المستوي في خط مستقيم واحد (الشكل ٥٣١) .

٥٧٠ — أنشىء من النقطة K مستوياً يميل ميلاً واحداً على مستويي الإسقاط بحيث يكون مسقطا مستقيمين اختياريين AB،CD على هذا المستوي بشكل مستقيمين متوازيين (الشكل ١١٢٣) .

٥٧١ – أنشىء من المستقيم AB مستوياً بحيث يكون مسقطا مستقيمين اختياريين CD،EF على هذا المستوي بشكل مستقيمين متوازيين (الشكل ١١٢٤) .

٥٧٢ – أنشىء من النقطة K مستوياً موازياً للمستقيم AB بحيث يكون مسقطا مستقيمين اختياريين CD،EF على هذا المستوي بشكل مستقيمين متوازيين (الشكل ١١٥٦) .

٥٧٣ – عين نقطة متساوية البعد عن أربع نقاط اختيارية في الفراغ A,B،C,D. (الشكل ٢٥١) .

٥٧٤ – عين على المستوي P نقطة متساوية البعد عن النقطة P_x وعن آثار المستقيم AB الواقع في هذا المستوي (الشكل ٣٤٠ ، ٣٤١) .

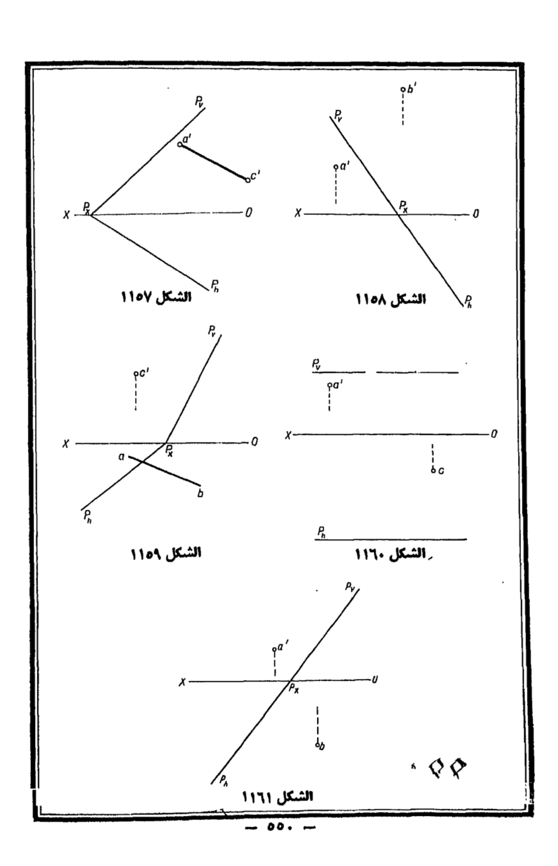
٥٧٥ – أنشىء في المستوي P مثلثاً قائماً ABC ذروته القائمة B على الأثر الأفقي للمستوي إذا علم المسقط الشاقولي للضلع AC (الشكل ١١٥٧) .

٥٧٦ – أنشىء في المستوي P ومن نقطة A منه مستقيماً يشكل مع آثار هذا المستوي زوايا متساوية φ (الشكل ٣٥٢ ، ٣٥٣) .

٥٧٧ – عين على المستوي P نقطة تبعد عن نقاطه A،B المسافات 20،30 mm (الشكل ١١٥٨) . ما هي الحالات الممكنة ؟

٥٧٨ – عين على المستوي P نقطة تبعد عن نقطة منه C مسافة 20 mm وعن مستقيم منه AB مسافة 10 mm (الشكل ١١٥٩) . ما هي الحالات الممكنة ؟

٥٧٩ – أنشىء في المستوي P ومن نقطة A منه مستقيماً يبعد عن نقطة أخرى منه C مسافة 20 mm (الشكل ١١٦٠) .



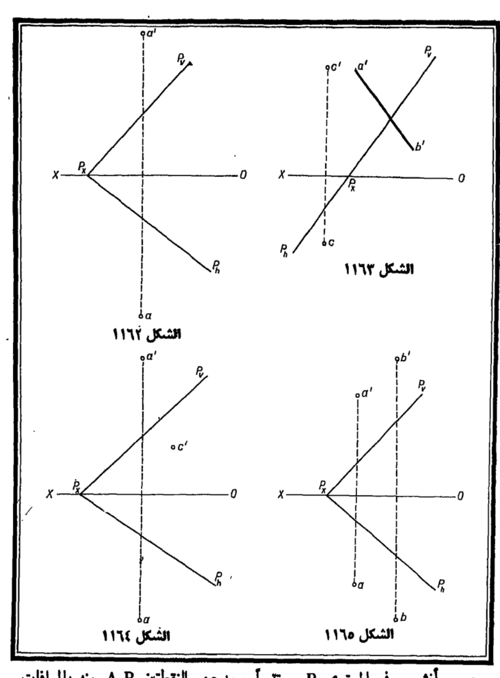
الشكل ١١٥٧

الشكل ١١٥٨

الشكل ١١٥٩

الشكل ١١٦٠

الشكل ١١٦١



٥٨٠ ـ أنشىء في المستوي P مستقيماً يبعد عن النقطتين A,B منه بالمسافات 20,15 mm (الشكل ١١٦١) .

٥٨١ ـ أنشىء في المستوي P المحل الهندسي للنقاط التي تبعد عن نقطة خارجية A مسافة 60 mm (الشكل ١١٦٢) .

٥٨٢ – عين على المستقيم AB من المستوي P نقطة تبعد عن نقطة خارجية C مسافة قدرها 60 mm (الشكل ١١٦٣).

٥٨٣ – عين على المستوي P نقطة تبعد عن نقطة C من هذا المستوي مسافة قدرها 15 mm وعن نقطة خارجية A مسافة 60 mm (الشكل ١١٦٤).

٥٨٤ – عين على المستوي P نقطة تبعد عن النقطتين الخارجيتين A,B المسافتين l_1 , l_2 (الشكل ١١٦٥).

٥٨٥ – أنشيء من النقطة M مستقيماً يقطع في النقطتين K,L المستقيم AB والمستوي P بشرط أن يكون MK=KL (الشكل ١١٦٦).

٥٨٦ – أنشيء مثلثاً متساوي الساقين ABC ذروته C على المستوي P إذا علمت أن ارتفاعه يساوي 40 mm (الشكل ١١٦٧).

٥٨٧ – أنشيء مثلثاً متساوي الأضلاع ABC إذا كانت ذروته C تقع على المستوي P (الشكل ١١٦٧).

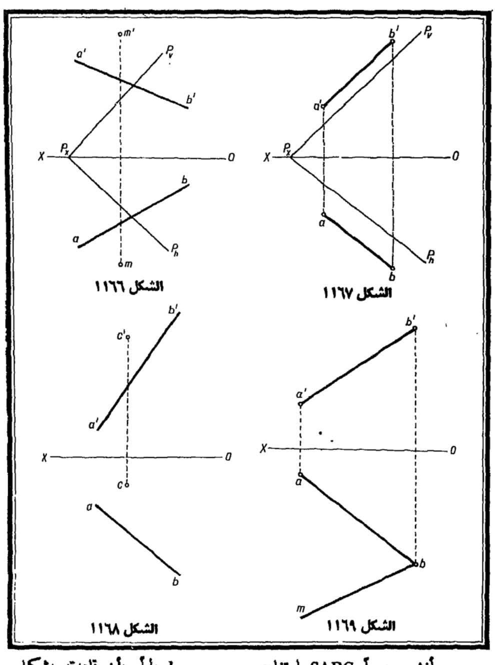
٥٨٨ – أنشيء محرك النقطة C المتحركة حول المستقيم AB (الشكل ١١٦٨).

٥٨٩ – أنشيء محرك أقرب نقطة M من المستقيم AB الذي يدور حول مستقيم اختياري CD (الشكل ٥٧٨).

٥٩٠ – أنشيء مساقط موشور قائم ارتفاعه يساوي 60 mm علماً بأن قاعدته بشكل مربع ABCD قطره BD يقع على المستقيم MN (الشكل ٦٥٨).

٥٩١ – أنشيء مساقط موشور قائم ارتفاعه يساوي 60 mm علماً بأن قاعدته بشكل مثلث متساوي الساقين ABC ذروته A تقع على المستقيم EF (الشكل ٦٦١).

٥٩٢ – أنشيء مساقط مكعب قاعدته ABCD بحيث يقع الضلع BC على المستقيم BM إذا عرفت القطعة AB والمسقط الأفقي للمستقيم العمودي عليها BM (الشكل ١١٦٩).



٢٩٣ ـ أنشىء هرماً SABC ارتفاعه h = 60 mm علماً بأن قاعدته بشكل مثلث متساوي الساقين ABC ذروته A تقع على المستقيم EF أما مسقط ذروته S على قاعدته فينطبق مع مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC (الشكل ٦٦١).

٥٩٤ ـ أنشىء مساقط الهرم SABC علماً بأن طول حرفه الجانبي SA يساوي 65 mm أما مسقط ذروته S على القاعدة فينطبق مع مركز الدائرة المرسومة داخل المثلث ABC (الشكل ١٦٣) .

٥٩٥ ـ أنشىء مساقط الهرم SABC ذو الإرتفاع h = 60 mm إذا علمت أن مسقط ذروته S على القاعدة ينطبق مع مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC (الشكل ١٦٣) .

٥٩٦ ـ أنشىء مساقط الهرم SABC إذا علمت أن مسقط ذروته S على القاعدة ينطبق مع مركز ثقل سطح القاعدة وأن الحرف الجانبي SC يميل على مستوي القاعدة بزاوية قدرها φ (الشكل ١٦٣) .

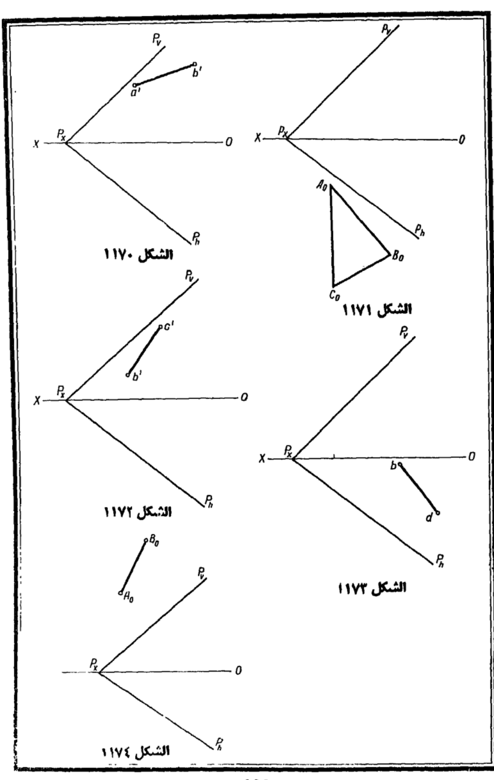
٥٩٧ ـ أنشىء مساقط موشور منتظم قائم ارتفاعه h = 60 mm وقاعدته ABC على المستوي P إذا علمت المسقط الشاقولي للضلع AB من قاعدتـــه (الشكل ١١٧٠) .

٥٩٨ ـ أنشىء مساقط موشور قائم ارتفاعه h= 60 mm وقاعدته ABC على المستوي R إذا عرف مطبق القـاعـــدة على المستوي H (الشكل ١١٧١) .

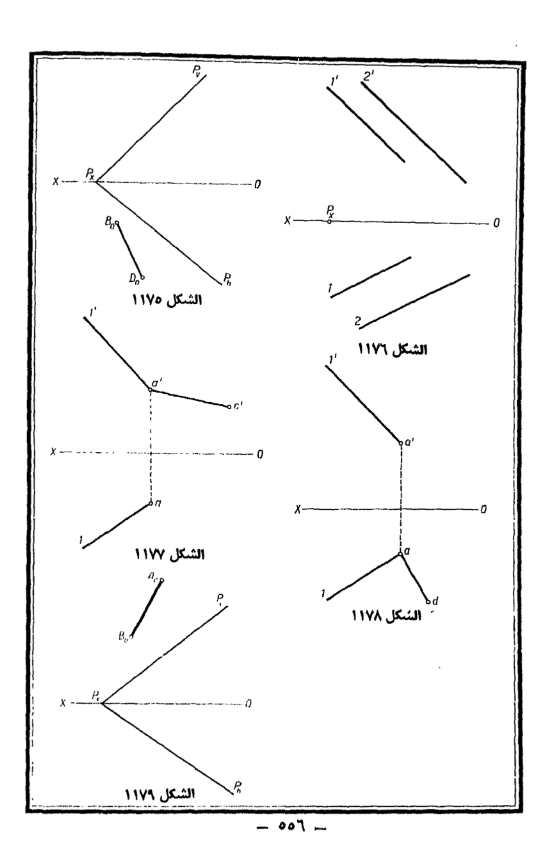
٥٩٩ أنشىء مساقط مكعب قاعدته ABCD على المستوي P إذا علمت المسقط الشاقولي للضلع BC من قاعدته (الشكل ١١٧٢) .

٦٠٠ ـ أنشىء مساقط مكعب قاعـدته ABCD على المستوي P إذا علمت المسقط الأفقي للقطر BD من قاعدته (الشكل ١١٧٣) .

٦٠١ ـ أنشىء مساقط مكعب قاعدته ABCD على المستوي P إذا علمت مطبق الضلع



Pv
b'
a'
X
Px
0
Ph
الشكل ١١٧٠
Pv
X
Px
0
A0
Ph
B0
C0
الشكل ١١٧١
Pv
c'
b'
X
Px
0
Ph
الشكل ١١٧٢
Pv
X
Px
0
b
d
Ph
الشكل ١١٧٣
B0
A0
Pv
Px
0
Ph
الشكل ١١٧٤



الشكل ١١٧٥

الشكل ١١٧٦

الشكل ١١٧٧

الشكل ١١٧٨

الشكل ١١٧٩

AB من قاعدته على المستوي V (الشكل ١١٧٤) .

٦٠٢ – أنشىء مساقط مكعب قاعدته ABCD على المستوي P إذا علمت مطبق قطر قاعدته BD على المستوي H (الشكل ١١٧٥) .

٦٠٣ – أنشىء مساقط موشور مثلثي منتظم قائم ارتفاعه h = 60 mm إذا علمت أن اثنين من حروفه الجانبية ينطبقان مع المستقيمين المفروضين (2,2′) ، (1,1′) والنقطة P_x – نقطة تلاقي آثار مستوي القاعـــدة (الشكل ١١٧٦) .

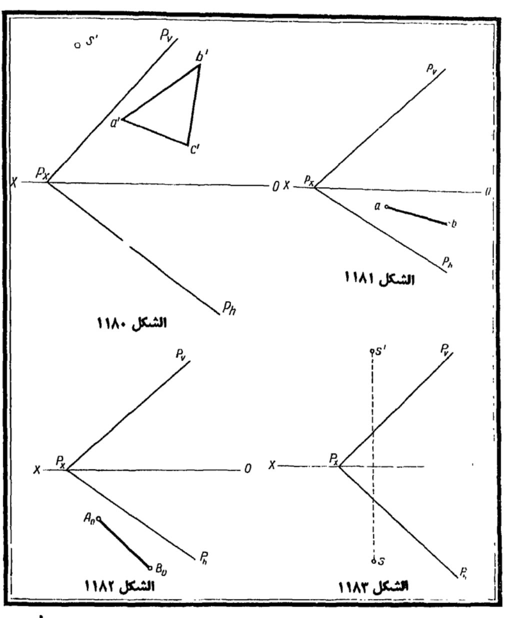
٦٠٤ – أنشىء مساقط مكعب قاعـــدته ABCD إذا علمت أن أحد حروفه الجانبية ينطبق مع المستقيم (1,1′) وإذاعلم المسقط الشاقولي للقطعة AC العمودية عليه (الشكل ١١٧٧) .

٦٠٥ – أنشىء مساقط موشور قائم ارتفاعه h = 60 mm إذا علمت أن قاعدته بشكل مربع ABCD وأن أحد حروفه الجانبية ينطبق مع المستقيم المفروض (1,1′) وإذا علم المسقط الأفقي للقطعة AB العمودية على المستقيم (1,1′) (الشكل ١١٧٨) .

٦٠٦ – أنشىء مساقط هرم مثلثي قاعدته ABC تقع على المستوي P إذا علمت مطبق الضلع AB من قاعدته على المستوي V (الشكل ١١٧٩) .

٦٠٧ – أنشىء مساقط هرم مثلثي ارتفاعه h =60 mm وقاعدته ABC على المستوي P إذا عرفت المساقط الشاقولية لقاعدته وذروته S (الشكل ١١٨٠) .

٦٠٨ – أنشىء مساقط هرم مثلثي منتظم قائم ارتفاعه h = 60 mm وقاعدته ABC على المستوي P إذا علمت المسقط الأفقي للضلع AB من قاعدته (الشكل ١١٨١) .



الشكل ١١٨٠

الشكل ١١٨١

الشكل ١١٨٢

الشكل ١١٨٣

٦٠٩ ـ أنشيء مساقط هرم منتظم قائم ارتفاعه $h = 60\ mm$ وقاعدته ABC على المستوي P إذا عرفت مطبق الضلع AB من قاعدته على المستوي H (الشكل ١١٨٢).

٦١٠ – أنشىء مساقط مخروط دائري قائم قاعدته تقع في المبتوي P ونصف قطرها 20 mm إذا علمت النقطة S ذروة المخروط (الشكل ١١٨٣) .

٦١١ – أنشىء المحل الهندسي في الفراغ للمستقيمات المارة من النقطة S والتي تميل على المستوي P بزاوية مفروضة قدرها φ (الشكل ١١٨٣) .

٦١٢ – أنشىء مساقط مخروط دائري قائم ارتفاعه $h = 60$ mm وقاعدته تقع على المستوي P ونصف قطرها 20 mm إذا علمت المسقط الشاقولي لمركز القاعدة (الشكل ١١٨٤) .

٦١٣ – أنشىء مساقط مخروط دائري قائم ارتفاعه $h = 60$ mm وقاعدته تقع على المستوي P ونصف قطرها 20 mm إذا عرفت مطبق النقطة C – مركز قاعدته – على المستوي H (الشكل ١١٨٥) .

٦١٤ – أنشىء مساقط مخروط دائري قائم ارتفاعه $h = 60$ mm ومحوره يقع على مستقيم مفروض $(1,1')$ إذا علمت مطبق النقطة A من دائرة قاعدته على المستوي H والنقطة P_x نقطة تلاقي آثار مستوي القاعدة (الشكل ١١٨٦).

٦١٥ – أنشىء مساقط مخروط دائري ارتفاعه $h = 60$ mm، قاعدته تقع على المستوي P ونصف قطرها 20 mm أما محوره فيقع على مستقيم مفروض $(1,1')$ إذا علمت النقطة P_x نقطة تلاقي آثار مستوي القاعدة (الشكل ١١٨٧) .

٦١٦ – أنشىء مساقط مخروط دائري ارتفاعه $h = 60$ mm ومحوره يتوضع على مستقيم مفروض $(1,1')$ إذا علمت النقطة C مركز قاعدته ذات نصف القطر 20 mm (الشكل ١١٨٨) .

٦١٧ – أنشيء مساقط مخروط دائري قائم ارتفاعه h= 60 mm ومحوره يتوضع على مستقيم مفروض (1,1′) إذا كانت النقطة A تقع على دائرة قاعدة المخروط (الشكل ١١٨٩) .

٦١٨ – أنشيء الهرم SABC إذا عرفت قاعدته ABC وأطوال الحروف الجانبية: SA = 55 mm , SB = 60 mm , SC = 60 mm (الشكل ١١٩٠) .
(حل المسألة باستخدام انفراد سطح الهرم) .

٦١٩ – أنشيء في المستوي P مستقيماً يقطع خط الأرض مشكلاً زاويـــة قدرها 30° (الشكل ١١٩١) .

٦٢٠ – أنشيء من النقطة S من المستوي P مستقيماً يشكل مع المستوي H زاوية قدرها 60° (الشكل ١١٩٢) .

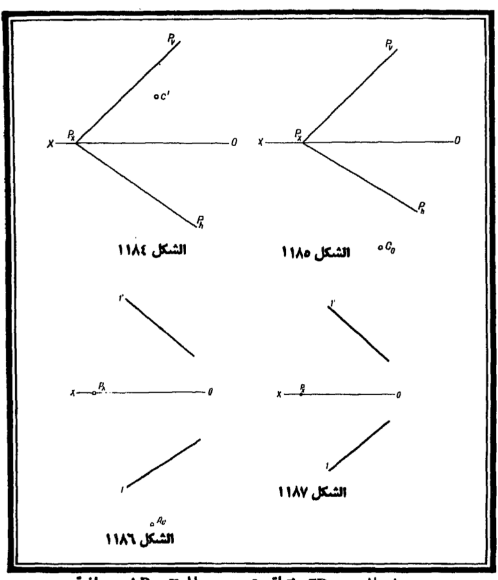
٦٢١ – أنشيء من النقطه S مستقيماً يوازي المستوي P ويشكل مع المستوي V زاوية قدرها 60° (الشكل ١١٩٣) .

٦٢٢ – أنشيء من النقطة S مستقيماً يوازي المستوي P ويشكل مع المستقيم AB .زاوية قدرها 30° (الشكل ١١٩٤) .

٦٢٣ – أنشيء المستوي Q الموازي للمستوي P والقاطع للكرة وفق دائرة نصف قطرها r = 20 mm (الشكل ١١٩٥) .

٦٢٤ – عين على المستقيم AB النقاط التي تبعد عن النقطة C بالمقدار 25 mm (الشكل ١١٩٦) . (استخدم المحل الهندسي للنقاط) .

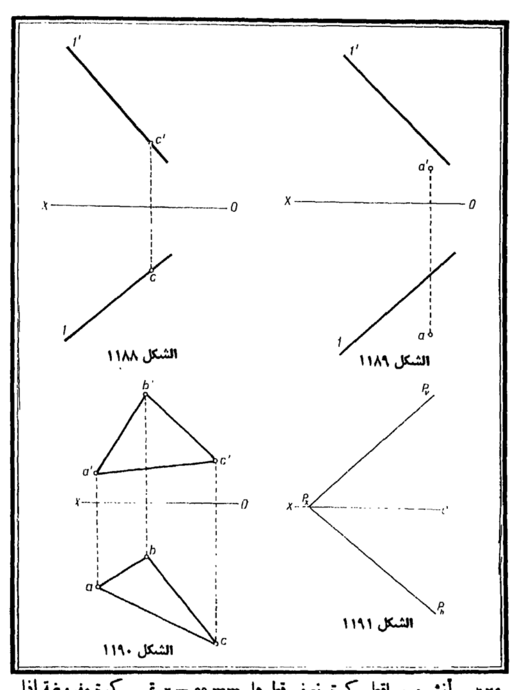
٦٢٥ – أنشيء من النقطة S مستقيماً يقطع المستقيم AB ويشكل مع المستوي P زاوية قدرها 60° (الشكل ١١٩٧) .



٦٢٦ ــ عين على المستقيم CD نقطة تبعد عن المستقيم AB مسافة 20 mm (الشكل ١١٩٨) .

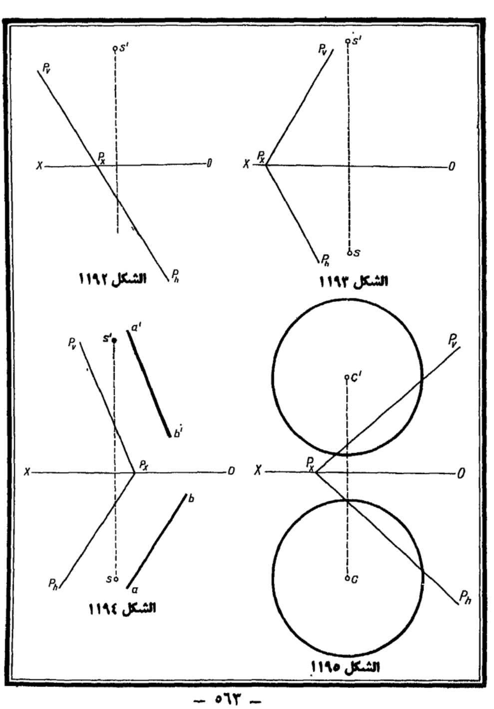
٦٢٧ ــ أنشىء من النقطة S مستقيماً يقطع المستقيم CD ويشكل مع المستقيم A B زاوية قدرها 30° (الشكل ١١٩٩) .

٦٢٨ ــ أنشىء مثلثاً قائماً CDK ذروته القائمة K تقع على المستقيم AB (الشكل ١٢٠٠) .



٦٢٩ ـ أنشيء مساقط كرة نصف قطرها r = 20 mm تمس كرة مفروضة إذا علمت أن مركز الكرة المنشودة يقع على المستقيم AB (الشكل ١٢٠١).

٦٣٠ ـ انشيء من المستقيم AB مستوياً يشكل مع المستوي H زاوية قدرها 60° (الشكل ١٢٠٢).

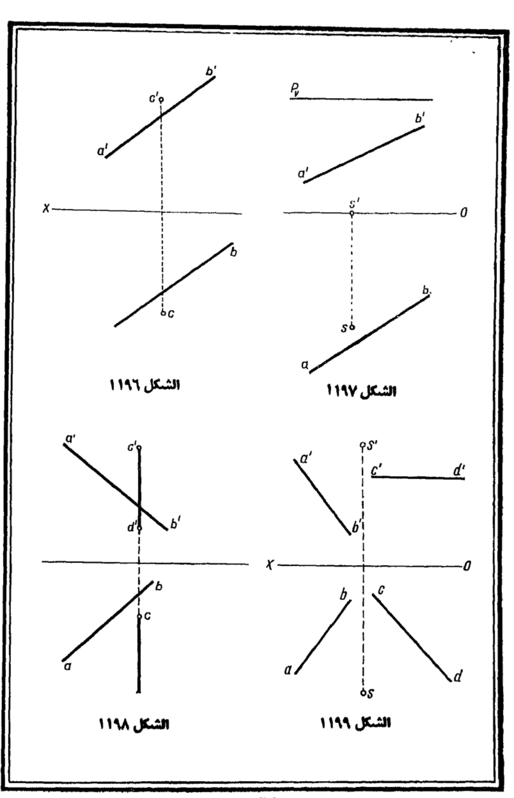


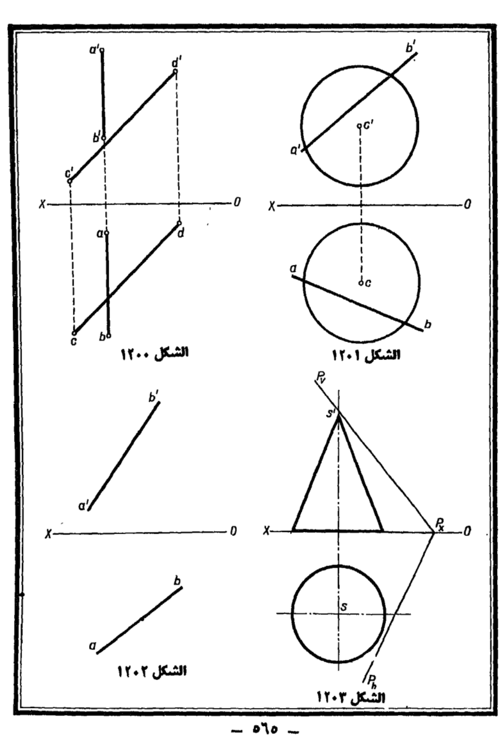
الشكل ١١٩٢

الشكل ١١٩٣

الشكل ١١٩٤

الشكل ١١٩٥


b'
c'
a'
X
b
c
الشكل ١١٩٦
P_v
b'
a'
s'
0
b
s
a
الشكل ١١٩٧
a'
c'
d'
b'
b
c
a
الشكل ١١٩٨
s'
a'
c'
d'
b'
X
0
b
c
a
d
s
الشكل ١١٩٩

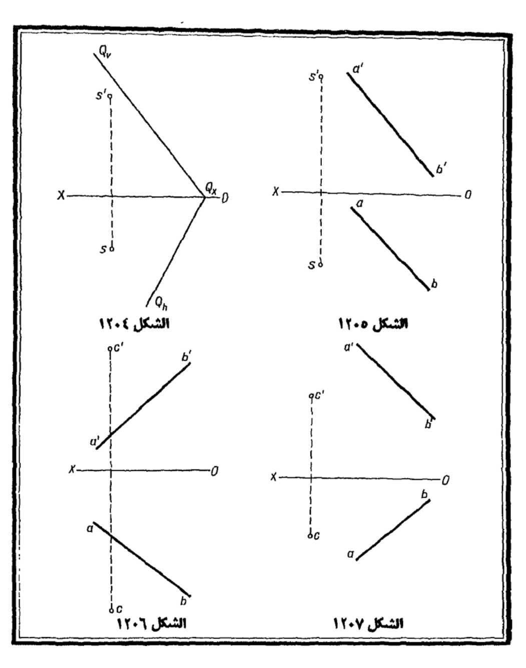


الشكل ١٢٠٠

الشكل ١٢٠١

الشكل ١٢٠٢

الشكل ١٢٠٣



الشكل ١٢٠٤

الشكل ١٢٠٥

الشكل ١٢٠٦

الشكل ١٢٠٧

٦٣١ ــ أنشيء آثار المستوي Q المماس لسطح المخروط والعمودي على المستوي P (الشكل ١٢٠٣) .

٦٣٢ — أنشىء من النقطة S مستوياً P يميل على المستوي H بزاوية مفروضة قدرها φ ويتعامد مع المستوي Q (الشكل ١٢٠٤).

٦٣٣ — أنشىء من النقطة S مستوياً P يميل على المستوي H بزاوية مفروضة قدرها φ ويوازي المستقيم AB (الشكل ١٢٠٥).

٦٣٤ — أنشىء من النقطة C مستوياً P يبعد عن المستقيم AB مسافة قدرها 20 mm (الشكل ١٢٠٦).

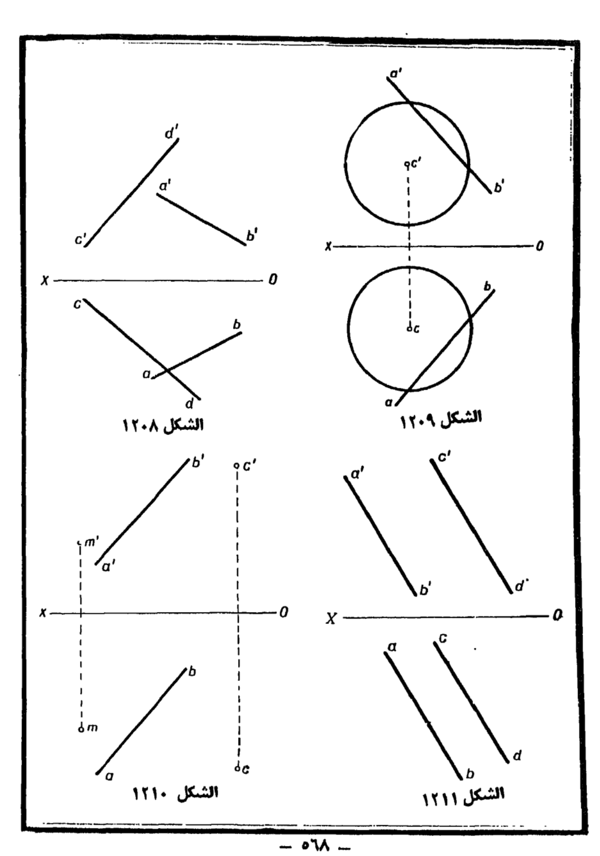
٦٣٥ — أنشىء من المستقيم AB مستوياً P يبعد عن النقطة C مسافة قدرها 20 mm (الشكل ١٢٠٧).

٦٣٦ — أنشىء مساقط اسطوانة دائرية قائمة محورها ينطبق مع المستقيم CD إذا كان المستقيم AB مماساً لهذه الاسطوانة (الشكل ١٢٠٨).

٦٣٧ — أنشىء من المستقيم AB مستوياً يقطع الكرة وفق دائرة نصف قطرها $r = 20$ mm (الشكل ١٢٠٩).

٦٣٨ — أنشىء من النقطة M مستوياً يوازي المستقيم AB ويبعد عن النقطة C مسافة قدرها 20 mm (الشكل ١٢١٠).

٦٣٩ — أنشىء من المستقيم AB مستوياً P يبعد عن المستقيم CD مسافة قدرها 20 mm (الشكل ١٢١١).


d'
a'
c'
b'
x
0
c
b
a
d
الشكل ١٢٠٨
a'
c'
b'
x
0
b
c
a
الشكل ١٢٠٩
b'
c'
m'
a'
x
0
b
m
a
c
الشكل ١٢١٠
c'
a'
b'
d'
X
0
a
c
d
b
الشكل ١٢١١

الفهرس



صدر بإشراف لجنة الإنجاز

سعر المبيع للطالب (٢٣٠) ل.س